

Asymptotische Analysis
mit Anwendungen in der Strömungsmechanik

Elfriede Friedmann

Spezialvorlesung WS 2009/2010

Mi:11-13 Uhr, URZ SR 215 (INF 293)

Es gibt zahlreiche Fragen asymptotischer Natur sowohl in der reinen als auch in der angewandten Mathematik. In dieser Vorlesung wird eine Einführung in die asymptotischen Methoden zur Lösung von Differentialgleichungsproblemen dargestellt. Mathematische Modelle, die in Physik, Chemie, Biologie, usw. aufgestellt werden, führen oft zu Probleme, deren exakte Lösung nur in Sonderfällen gelingt. Hier besitzen die Näherungsmethoden eine große Bedeutung. Es gibt numerische und asymptotische Näherungsmethoden. Die numerischen Methoden haben sich bewährt, werden aber instabil, wenn kleine Parameter vorkommen oder das Rechengebiet groß oder kompliziert wird. In solchen Fällen kann man viel einfachere Probleme konstruieren, indem man einen Parameter gegen Null gehen lässt oder das Gebiet vereinfacht. Die Lösung des reduzierten Problems unterscheidet sich oft wesentlich von der Lösung des ursprünglichen Problems, und Standardlösungsmethoden führen oft zu falschen Ergebnissen. Zur Behandlung solcher sogenannter singular gestörter Probleme hilft die asymptotische Analysis weiter. Das ursprüngliche Problem wird durch immer genauere, gut zu behandelnde Probleme ersetzt. Wir werden einige spezielle analytische Methoden kennenlernen, u.a. die Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung und die Mehrskalermethode, die wir vor allem an Probleme aus der Strömungsmechanik (Umströmung eines Körpers oder warum schwimmt der Hai so schnell?) anwenden werden.

Stichwörter: asymptotische Entwicklung, MMAE (Method of Matched Asymptotic Expansions), Mehrskalermethoden, Navier-Stokes, Prandtl, Grenzschichten, Separation

Voraussetzungen: Analysis 1,2, (nicht erforderlich aber hilfreich) Grundkenntnisse in partiellen Differentialgleichungen oder Strömungsmechanik

Zielgruppe: Studierende der Mathematik, Informatik und Physik im Hauptstudium oder Promotionsstudium und alle die wissen wollen, warum der Hai so schnell schwimmt

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Exkurs in die Strömungsmechanik | 1 |
| 1.2 | Lineares Konvektions-Diffusionsmodell als Beispiel eines singulären Störungsproblem | 2 |
| 1.3 | Methoden zur exakten Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen | 3 |
| 1.3.1 | Charakteristikenverfahren | 4 |
| 1.3.2 | Separation der Variablen | 5 |
| 1.3.3 | Ähnlichkeitslösungen | 6 |
| 1.3.4 | Transformation auf lineare partielle DGL | 7 |
| 1.3.5 | Methode der Parameter-Differentiation | 7 |
| 1.4 | Störungsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen | 7 |
| 2 | Grundlagen der asymptotischen Analysis | 11 |
| 2.1 | Prandtlsche Grenzschichttheorie | 11 |
| 2.2 | Friedrichssche Modell | 12 |
| 2.2.1 | Lösung mit MMAE | 13 |
| 2.2.2 | Lösung mit SCEM | 15 |
| 2.2.3 | Lösung mit der Mehrskalenmethode | 16 |
| 2.3 | Ordnungssymbole | 17 |
| 2.3.1 | Definition von Vergleichsfunktionen | 17 |
| 2.3.2 | Vergleich von Vergleichsfunktionen | 18 |
| 2.3.3 | Totale Ordnung | 18 |
| 2.3.4 | Ordnung einer Funktion | 19 |
| 2.4 | Asymptotische Folgen | 20 |
| 2.5 | Asymptotische Entwicklungen | 20 |
| 2.5.1 | Asymptotische Approximationen | 20 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Asymptotische Methoden | 27 |
| 3.1 | MMAE - Method of Matched Asymptotic Expansions | 27 |
| 3.1.1 | Entwicklungsoperator | 27 |
| 3.1.2 | Äußere und innere Entwicklung | 28 |
| 3.1.3 | Asymptotisches Matching | 32 |
| 3.1.4 | Gleichmäßige Konvergenz | 35 |
| 3.1.5 | Matching an einem Beispiel | 35 |
| 3.1.6 | Friedrichs Modell mit dem neuen Formalismus | 35 |
| 3.2 | SCEM - Successive Complementary Expansion Method | 35 |
| 4 | Strömungen hoher Reynolds Zahl | 39 |
| 4.0.1 | Grenzschichttheorien | 40 |
| 4.0.2 | Anwendung: Anströmung einer dünnen ebenen unendlich langen Platte | 45 |
| 5 | Homogenisierungstheorie | 53 |
| 5.1 | Mathematische Formulierung | 53 |
| 5.2 | Mehrskalennmethode | 54 |
| 5.2.1 | Konstruktion des homogenisierten Operators: | 56 |
| | Literatur | 59 |

Chapter 1

Einleitung

1.1 Exkurs in die Strömungsmechanik

In dieser Vorlesung betrachten wir als Beispiele von singulären Störungsproblemen Modelle aus der Strömungsmechanik. Wir betrachten inkompressible Strömungen eines Newtonschen Fluids, in dem die Gravitationskräfte vernachlässigbar sind. Die Dichte des Fluids ist im Raum und in der Zeit gleichmäßig verteilt. Die Gleichungen der Strömungsmechanik beinhalten die Kontinuitäts-, Massenerhaltungs- und Impulserhaltungsgleichung (2. Newtonsche Gesetz). Es ergeben sich die wohlbekanntenen Navier-Stokes Gleichungen:

$$\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega \quad (1.1.2)$$

Dabei beschreibt die Variable $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Strömungsgeschwindigkeit, $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ den Druck und $\nu > 0$ die Viskosität.

Diese Gleichungen beschreiben in hervorragender Weise Strömungen von Fluiden:

- Luftströmung um ein Auto (c_w -Wert)
- Luftströmung um ein Flugzeug (Widerstand, Auftrieb)
- Strömung um einen Propeller, einer Turbine
- Strömung um ein Schiff, (Hoch-) Wasser in einem Fluß und Wellen, Tsunamies auf dem Meer als Mehrphasenfluid

Niemand ist in der Lage, die Navier-Stokes Gleichungen in den genannten Beispielen analytisch oder auch numerisch zur vollen Zufriedenheit zu lösen (Luftströmung um ein Auto: Scheibenwischer, Außenspiegel, ...). Auf analytischer Seite ist nicht einmal die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichungen bewiesen (Mileniumsproblem). Für das Verständnis und auch für die Praxis benötigt man gute approximative Gleichungen.

1.2 Lineares Konvektions-Diffusionsmodell als Beispiel eines singulären Störungsproblem

Wir betrachten einen schnellen und gleichmäßig fließenden Fluß. An einer Stelle wird eine Farblösung eingebracht. Welche Form nimmt das Färbemittel mit der Zeit an?

Hier spielen zwei physikalische Prozesse eine Rolle:

1. die Diffusion des Färbemittels durch das Wasser
2. die Konvektion, die schnelle Bewegung der Strömung

Diffusion alleine würde den Farbstoff langsam gleichmäßig ausbreiten. Konvektion alleine würde den Farbstoff entlang einer eindimensionalen Kurve weitertragen. Beides zusammen, wobei die Geschwindigkeit des Wassers hier ausschlaggebend ist, erzeugt eine dünne keilförmige Farbspur.

Die Modellierung einer linearen Konvektions-Diffusions-Gleichung mit dominierendem Konvektionsterm ergibt

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

wobei ε ein kleiner positiver Parameter ist und a, b, f gegebene Funktionen.

Beispiel 1.2.1.

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + u'(x) &= 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{aligned}$$

Wir setzen formal $\varepsilon = 0$ und bekommen

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Ausgangsproblem hat dieses System keine Lösung in $C^2[0, 1]$.

Die Lösung ist:

$$u(x) = x - \frac{e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Für ein $a \in [0, 1)$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow a} u(x),$$

aber

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 0.$$

Das bedeutet, das Problem 1.2.1 ist singulär gestört und die Lösung ändert sich abrupt, wenn x gegen 1 geht.

Mit solchen Problemen (Störungsprobleme) wollen wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen: Differentialgleichungen, die von einem kleinen positiven Parameter abhängen und deren Lösungen (oder deren Ableitungen) einen unstetigen Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ haben.

Anwendungsbereiche:

theoretische Physik, Mechanik und besonders in der Strömungsmechanik

Es gibt keine allgemeine Theorie über asymptotische Methoden, keine allgemeingültigen Sätze und Theoreme. Die asymptotischen Methoden sind eher flexibel und anwendungsorientiert. Man wendet sie jedoch auf eine viel weiter Klasse von DGL an als die exakten Methoden.

1.3 Methoden zur exakten Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

Die Erhaltungssätze (Kontinuitätsgleichung, Bewegungsgleichung, Energiegleichung), die am Beginn fast jeder theoretischen Behandlung von Strömungsproblemen stehen, sind nichtlinear. Nur in sehr speziellen, wenn auch wichtigen Sonderfällen reduzieren sie sich auf lineare Differentialgleichungen.

Den nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen stehen aber leider keine entsprechend umfangreiche Lösungsmethoden gegenüber. Während uns die Mathematik bei linearen partiellen Differentialgleichungen eine gut ausgearbeitete Theorie bereits seit langem bereitstellt, ist man bei nichtlinearen Problemen noch damit beschäftigt, die Vielfalt möglicher Lösungen anhand einfacher Beispiele verstehen zu lernen.

Eine wesentliche Schwierigkeit bei den nichtlinearen Differentialgleichungen ergibt sich daraus, dass die Superposition von bereits bekannten Lösungen i. allg. nicht zu neuen Lösungen führt. Damit entfällt ein wirkungsvolles Verfahren, mit dessen Hilfe man bei linearen Differentialgleichungen die Randbedingungen erfüllen kann. So erweist sich die Erfüllung der Randbedingungen oft als ein großes Hindernis.

Wesentlicher Lösungsschritt: Vereinfachung des Problems

- Überführung in ein lineares Problem (Transformationsmethoden, Störungsmethoden)
- Reduzierung der partiellen Dgl. auf eine gewöhnliche Dgl. (Separationsmethoden, Ähnlichkeitslösungen, Lösungen spezieller Form)

Die Vereinfachungen können entweder exakt sein oder auf einer Approximation der ursprünglichen Gleichung beruhen.

Es gibt eine allgemeine Theorie für eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Aufbauend auf diese Theorie lässt sich die Dgl. rezeptmäßig lösen. Für partielle Dgl. höherer Ordnung und für Systeme von partiellen Dgl. erster Ordnung gibt es diese Theorie nicht.

Eine Lösung wird als exakt bezeichnet, selbst wenn eine ODE numerisch integriert werden muß.

Die bekanntesten Methoden zur exakten Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen sind:

- quasilin. Dgl., PDE 2. Ordnung, Systeme 1. Ordnung können mit dem Charakteristikenverfahren gelöst werden
- Separation der Variablen
- Ähnlichkeitslösungen
- Transformation auf lineare partielle DGL (Hodographentransf., Legendre-Potential, Legendre-Transf., Hopf-Cole Transf.)
- Methode der Parameter-Differentiation

1.3.1 Charakteristikenverfahren

Hier wird die Lösung der PDE auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen $(2n+1)$ zurückgeführt. Das liegt an der Existenz von Charakteristiken der PDE 1. Ordnung.

Wir betrachten eine allgemeine nichtlineare PDE 1. Ordnung:

$$L = b(x)Du(x) + c(x)u(x) = 0$$

Idee: Wir wollen $u(x)$ berechnen, $x \in \Omega$, indem wir einen Pfad in Ω finden, der x mit $x_0 \in \Gamma$ verbindet. $u(x_0)$ ist als Randbedingung bekannt und es lässt sich daraus auf $u(x)$ folgern.

Wie sieht das Verfahren konkret aus?

1. Parametrisierung

$$x \rightsquigarrow x(s)$$

$$u(x) \rightsquigarrow u(x(s)) \rightsquigarrow z(s) \text{ (z zeichnet die Werte von u entlang dem Pfad auf)}$$

$$Du(x) \rightsquigarrow Du(x(s)) \rightsquigarrow p(s) \text{ (p zeichnet die Werte des Gradienten entlang dem Pfad auf)}$$

$$L(p(s), z(s), x(s)) = b(x)p(s) + c(x)z(s) = 0$$

2. Annahme: $\dot{x}(s) = L_p = b(x)$ bekannt

$$\dot{z}(s) = Du \cdot \dot{x} = p \cdot \dot{x}$$

$$\dot{p}(s) = \sum u_{x_i x_j} \cdot \dot{x}^j$$

Die zweite Ableitungen bekommt man, wenn man $L = 0$ noch einmal nach x differenziert:

$$L_p u_{x_i x_j} + L_z u_{x_i} + L_{x_i} = 0$$

1.3.2 Separation der Variablen

Diese Lösungsmethode ist bei linearen PDE weit verbreitet. Sie kann aber auch bei gewissen nichtlinearen Problemen mit Erfolg eingesetzt werden. Insbesondere im Zusammenhang mit Ähnlichkeitslösungen (siehe nächsten Abschnitt).

Bei linearen Dgl. kann man durch Superposition von Separationslösungen jede gewünschte RB erfüllen; bei nichtlinearen Dgl. ist dies nicht möglich.

Vorgehensweise:

- Untersuchung, welche Lösungen bzw. Lösungsformen sich durch Separation der Variablen überhaupt darstellen lassen ohne Rücksicht auf die RB
- Untersuchung, welche physikalische RB oder AB durch diese Lösungen erfüllt werden können

Beispiel 1.3.1. Staupunktströmung

Modell: NS (System PDE 2. Ordnung) 1. Einführung einer Stromfunktion ψ : $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$ liefert die Wirbeltransportgl. (PDE 4. Ordnung):

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial}{\partial x} \psi \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi = \nu \Delta^2 \psi$$

2. Separationsansatz:

$$\psi = f(x)g(y)$$

Bekannt ist auch noch der Separationsansatz $f(x) + g(y)$ (Courant u. Hilbert).

3. Herleitung einer separierbaren Dgl. der Form

$$F_1(x)G_1(y) = F_2(x)G_2(y)$$

Dann ist

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{G_2(x)}{G_1(x)}$$

und somit

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{G_2(x)}{G_1(x)} = \text{const}$$

zu lösen.

Für die Staupunktströmung bekommt man

$$\psi = xg(y)$$

mit

$$\nu g''' + gg'' - g'^2 + C = 0.$$

Diese nichtlineare gewöhnliche Dgl. 3. Ordnung kann mit einem der gängigen Verfahren numerisch gelöst werden. Dazu sind RB erforderlich. Nicht alle RB können aufgrund des Separationsansatzes erfüllt werden.

Für eine feste Wand gilt: $\psi_x = \psi_y = 0$. D.h. für $y = 0$ gilt $g(0) = g'(0) = 0$. Auf $x = 0$ können keine Haftbedingungen erfüllt werden, da sonst $g(y) \equiv 0$ sein müßte.

In sehr großer Entfernung von der Wand $y \rightarrow \infty$ ist die Reibung vernachlässigbar und die Strömung rotationsfrei: $\text{rot}v = v_x - u_y = 0$. D.h. $\Delta\psi = 0$ und somit $g''(\infty) = 0$.

Bild S. 25 (Schneider)

1.3.3 Ähnlichkeitslösungen

Die Gleichungen in der Strömungsmechanik sind im Allgemeinen nichtlinear. Diese Nichtlinearität ist der Grund, daß eine exakte Lösung dieser Gleichungen nicht möglich ist. Generell arbeitet man mit **Ähnlichkeitslösungen**, die man unter strengen Symmetrieanahmen erhält. Ähnlichkeitslösungen sind somit eine Klasse von speziellen Lösungen, die für die Strömungslehre außerordentlich wichtig sind.

Ähnlichkeitslösungen für viskose inkompressible Strömungen:

- (a) Stationäre Strömung zw. unendlich entfernten parallelen Platten, durch ein rundes Rohr, oder zwischen konzentrischen Rohren
- (b) Stationäre Strömung zw. fixierten, sich langsam bewegenden parallelen Platten oder konzentrischen Rohren
- (c) Stationäre Strömung zw. rotierenden konzentrischen Rohre
- (d) Eben oder axisymmetrische Strömung zw. unendlich entfernten Platten
- (e) Stationäre Drehung einer unendlich dünnen Scheibe
- (f) Stationäre ebene Strömung zw. divergenten Platten
- (g) Stoßartige oder sinusförmige Bewegung einer unendlich dünnen Platte in ihrer eigenen Ebene

Ähnlichkeitslösungen zeichnen sich dadurch aus, dass die Anzahl der unabhängigen Variablen gegenüber dem ursprünglichen Problem reduziert wurde (z.B. PDE zu gew. Dgl.) und durch das bessere Verständnis der Vorgänge, da diese Lösungen oft das asymptotische Verhalten der Strömung in Gebieten beschreiben, wo sie bereits unabhängig von speziellen AB und RB ist.

Nachteil: Diese sich selbstähnlichen Strömungen umfassen idealisierte Geometrien, weit weg von den realen Anwendungen.

Die Art der RB u. AB spielt für den Erfolg oder Mißerfolg eine Rolle.

Methoden zur Herleitung (Stand 1964):

- Gruppentheoretische Methode
- Dimensionsanalytische Methode
- Methode der Separation der Variablen
- Methode der freien Variablen

1.3.4 Transformation auf lineare partielle DGL

Es ist sinnvoll nach Methoden zu suchen, mit denen nichtlineare Dgl. in lineare Dgl. überführt werden können, da diese einfacher zu lösen sind. In gewissen Fällen kann man das durch geeignete Transformationen der unabhängigen und abhängigen Variablen erreichen.

Linearisierungs-Transformationen:

- Hodographentransf.
- Legendre-Potential
- Legendre-Transf.
- Hopf-Cole Transf.

1.3.5 Methode der Parameter-Differentiation

eine relativ junge Methode (1967)

Ausgangspunkt: die gesuchte Lösung hängt von einem Parameter ab, der algebraisch in der Gl. oder in den RB auftritt (man kann ihn aber auch künstlich einführen).

Voraussetzung: Die Lösung ist für einen gewissen Wert des Parameters bekannt

wesentlicher Schritt: man differenziert die Ausgangsgleichungen nach diesem Parameter und erhält eine lineare Differentialgleichung, deren Lösung mit einer AB dann numerisch zu integrieren ist.

Vorteil: die Nichtlinearität wird in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung verlegt

Schwierigkeit: die erhaltene lineare Dgl. hat variable Koeffizienten

tritt nicht auf, wenn nur die RB nichtlinear ist.

1.4 Störungsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen

Da die exakte Lösung von Dgl nur in Sonderfällen gelingt, besitzen die Näherungsmethoden eine große Bedeutung. Im wesentlichen unterscheidet man numerische und asymptotische Näherungsmethoden. Bei der angenäherten Lösung von Dgl-Problemen haben sich die numerischen Methoden im allgemeinen bewährt. Benutzt man sie jedoch zur approximativen Berechnung der Lösungen von Dgl in Umgebung von Singularitäten, so werden sie meistens instabil. Bei derartigen Problemen sind die asymptotischen Näherungsmethoden geeigneter.

Die Störungstheorie ist eine umfangreiche Kollektion iterativer Methoden, um eine approximative Lösung zu einem Problem mit kleinem Parameter zu finden. Diese Methoden

sind sehr leistungsfähig, so dass man bei vielen schwierig zu lösenden DGL einen kleinen Parameter einführt, den man dann anschließend 1 setzt, um das ursprüngliche Problem zu erhalten.

Vorgehensweise: Man zerlegt ein schwer zu lösendes Problem in eine Reihe leichter Probleme, wobei die ersten Schritte schon die Haupteigenschaften der Lösung beschreibt, und die folgenden kleine Korrekturen liefern.

Definition 1.4.1. Eine Dgl mit einem kleinen Parameter ε , die für $\varepsilon \rightarrow 0$ ihre Struktur ändert (z.B. Erniedrigung der Ordnung, Änderung des Typs ell \rightarrow hyp., partiell \rightarrow gew., nichtlin. \rightarrow lin., singular, regulär, periodisch aperiodisch) bezeichnen wir als **asymptotisches Modell**.

Beispiel 1.4.2. Umströmung eines Körpers durch ein Strömungsmedium mit geringer Zähigkeit ν (NS)

Für die Geschwindigkeitskomponenten setzen wir:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

mit einer Stromfunktion $\psi = \psi(x, y)$. So gilt

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi$$

Hier liegt ein asymptotisches Modell vor, Dgl 4. Ordnung mit kleinem Parameter ν .

Mathematische Vorgehensweise:

1. Vernachlässigung des Terms $\nu \Delta^2 \psi$ - Dgl 3. Ordnung
2. RB: Haftbedingung an der Berandung des Körpers
3. Anströmungsgeschw.

Die Haftbedingung kann man aber so nicht erfüllen, so daß diese Vorgehensweise hier nicht passen ist.

Grundidee Prandtl: Für geringe Zähigkeiten genügt es, die Zähigkeit nur in einer dünnen, den Körper unmittelbar umgebenden Schicht, der sog. Grenzschicht, zu berücksichtigen und im Außengebiet die Zähigkeit zu vernachlässigen. Dies war der Ausgang für den Aufbau einer Theorie, der sog. Grenzschichttheorie: Innerhalb der dünnen Grenzschicht konnten die NS Dgl durch vereinfachte Grenzschichtgl. ersetzt werden, die sich durch Variablenstreckung und $Re \rightarrow \infty$ aus den NS ergeben. Mit den Lösungen dieser Grenzschichtgl. können die Haftbed. erfüllt werden. Um eine Lösung für das gesamte Gebiet zu erhalten, sind beim Übergang von der Grenzschicht zum Außengebiet entsprechende Übergangsbed. zu erfüllen.

Nach dem Vorbild der Prandtlschen Grenzschichttheorie beschäftigten sich anschließend zahlreiche Wissenschaftler mit der mathematischen Modellierung asymptotischer Prozesse (Friedrichs, van Dyke, Cole).

Beispiel 1.4.3. Umschlag (Film KA)

Läßt man aus einem Gefäß durch ein Glasrohr mit Farbe geimpfte Flüssigkeit außströmen, dann ziehen sich die Farbfäden anfangs ungestört durch das Rohr, bis nach einer gewissen Zeit eine ungeordnete Bewegung beginnt. Es findet ein Umschlag von der laminaren

in die turbulente Strömung statt. Zur mathematischen Behandlung dieses Umschlags laminar-turbulent überlagert man einer laminaren Grundströmung $U(y)$ eine periodische Strömungsbewegung mit Stromfunktion

$$\psi(x, y, t) = \phi(y)e^{i\alpha(x-ct)}.$$

Je nachdem ob mit wachsender Zeit die Amplitude der Störungsbewegung ab- oder zunimmt, ist die laminare Grundströmung stabil oder instabil.

Voraussetzung: Störung ist hinreichend klein, so daß die Linearisierung gerechtfertigt ist, so erhält man aus den NS die Orr-Sommerfeldsche Dgl. (grundlegend für die hydrodynamische Stabilität):

$$\frac{1}{Re}\varphi^{(4)}(y) - i\alpha[u(y) - c]\varphi''(y) - [\alpha^2(u(y) - c) + u''(y)]\varphi(y) = 0$$

RB: $\varphi(y_w) = \varphi'(y_w) = \varphi(\infty) = \varphi'(\infty) = 0$.

Der Umschlag laminar-turbulent erfolgt bei sehr großen Re , so daß man hier ein EWP mit einer Dgl zu lösen, die bei der höchsten Ableitung einen kleinen Parameter enthält.

Beispiel 1.4.4. Die Abmessung einer Dimension ist klein

Ist bei einem physikalischen Problem die Abmessung einer Dimension im Verhältnis zu den übrigen klein, so kann dieses Problem durch Entdimensionalisierung der entsprechenden Koordinate auf ein asymptotisches Modell zurückgeführt werden. Mathematisch erfolgt hierdurch eine Ersetzung eines n -dimensionalen Problems durch unendlich viele $(n-1)$ -dimensionale Probleme.

Plattengl. u. Flachwasserkanal

Bedeutendste Approximationstheorien:

- Prandtl Tragflächen Theorie
- Karmán-Tsien Methode für Tragflächen in Unterschallströmung
- Prandtl-Glauert Approximation für Unterschallströmung
- Janzen-Rayleigh Reihe für Unterschallströmung ($Ma \ll 1$)
- Stokes und Oseen Approximation für viskose Strömung ($Re \ll 1$)
- Prandtl Grenzschichttheorie ($Re \gg 1$)
- Karmán-Pohlhausen Grenzschichttheorie
- Newton-Busemann Theorie für Überschallströmung ($Ma \gg 1, (\gamma - 1) \ll 1$)

Bei manchen Anwendungen sucht man nach gesamtgültigen Approximationen wie z.B. im Falle von Separation von viskoser Umströmung eines Körpers oder Überschallumströmung.

Chapter 2

Grundlagen der asymptotischen Analysis

Prandtls Idee zur Grenzschichttheorie gab den Anstoß zur Entwicklung der asymptotischen Analysis.

2.1 Prandtlsche Grenzschichttheorie

Die Theorie der inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeiten war von Anfang an gut entwickelt, während die Hinzunahme der Reibung (Vorgabe der Haftbedingung) für die Theorie eine erhebliche Erschwerung bedeutete.

Beispiel 2.1.1. Einfache Scherströmung (Couette Strömung)
Lineares Geschwindigkeitsprofil

$$u(y) = U \frac{y}{h}.$$

An beiden Wänden und an jedem wandparallelen Flächenelement wirkt in der Strömungsrichtung eine Reibungskraft pro Flächeneinheit, die sogenannte Schubspannung:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

wobei $\mu = \rho\nu$ die dynamische Zähigkeit darstellt.

Die REYNOLDSsche Zahl ist die dimensionslose Größe, die eine Strömung charakterisiert:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} = const.$$

Das Reynoldsche Ähnlichkeitsgesetz besagt, dass für verschiedene strömende Medien bei verschieden großer Geschwindigkeiten und bei verschieden großen, aber geometrisch ähnlichen Körpern die Strömung mechanisch ähnlich verläuft, d.h. mit geometrisch ähnlichen Stromlinienbildern, wenn Re gleich groß ist.

Physikalisch kann Re aufgefasst werden als das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften. Kleine Re bedeuten Strömungen mit Überwiegen der Reibungskräfte

(Nebeltröpfchen, Schmierfilm, schleichende Bewegung), große Re solche mit Überwiegen der Trägheitskräfte, wie z.B. bei flugtechnischen Problemen.

Prandtls Entdeckung: Bei der Umströmung eines Körpers mit hoher Re beschränkt sich der Einfluß der Zähigkeit auf eine dünne Schicht in der Nähe der umströmten Oberflächen und auf einem schmalen Nachlauf hinter dem Körper, während die übrige Strömung im wesentlichen reibungslos verläuft. D.h. man kann für die theoretische Betrachtung das ganze Strömungsfeld in zwei Bereiche aufteilen: das Gebiet der dünnen Reibungsschicht in Wandnähe, und das Gebiet mit reibungsloser Flüssigkeit, was eine erhebliche Vereinfachung mit sich bringt.

2.2 Friedrichssche Modell

Wir suchen nach der Lösung der folgenden Gleichungen:

$$L_\varepsilon[u_\varepsilon(x, \varepsilon)] = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

Wobei L_ε ein beliebiger Integral- oder Differentialoperator ist und $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, wobei ε_0 eine festgelegte positive Zahl ist, beliebig klein. $u_0(x)$ ist die Lösung von dem reduzierten Problem ($\varepsilon = 0$).

$$L_0[u_0(x)] = 0, \quad x \in \Omega_0.$$

Definition 2.2.1. Das Problem ist ein **reguläres Störungsproblem**, wenn

$$|u_\varepsilon - u_0|_\infty < K\delta(\varepsilon),$$

mit $K > 0$, $\delta(\varepsilon) \geq 0$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$.

Diese Bedingung ist nicht immer erfüllt oder nicht im ganzen Gebiet Ω_ε .

Definition 2.2.2. Es handelt sich um ein **singuläres Störungsproblem**, wenn eine Singularität auftritt, d.h. wenn die Bedingung nicht gilt.

Generell ist dies der Fall, wenn $\dim \Omega_0 < \dim \Omega_\varepsilon$.

Das Urmodell eines singulären Störungsproblems wurde 1942 von Friedrichs eingeführt, um das Matching zwischen der Grenzschicht und der Potentialströmung, wie sie von Prandtl eingeführt wurde, zu rechtfertigen.

Beispiel 2.2.3. Friedrichssche Modell

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon \frac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} + \frac{du_\varepsilon}{dx} - a = 0, \quad \text{mit } 0 < a < 1, 0 < x < 1$$

$$\text{s.t. } u_\varepsilon|_{x=0} = 0, \quad u_\varepsilon|_{x=1} = 1.$$

Reduziertes Modell:

$$L_0 u_0 = u_0' - a = 0 \quad \text{mit } 0 < a < 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.2.1)$$

$$u_0|_{x=0} = 0, \quad u_0|_{x=1} = 1 \quad (2.2.2)$$

Lösung: $u_0 = ax + A$, A wird durch die RB bestimmt. I. Allg. Kann man nicht beide Bedingungen erfüllen. Das liegt daran, dass man beim reduzierten Problem eine geringere Ordnung hat. Ist die RB in $x = 0$ erfüllt, dann gilt $u_0 = ax$. Ist die RB in $x = 1$ erfüllt, dann gilt $u_0 = ax + 1 - a$.

In diesem Fall ist die exakte Lösung bekannt:

$$u_\varepsilon(x, \varepsilon) = ax + (1 - a) \frac{1 - \exp(\frac{-x}{\varepsilon})}{1 - \exp(\frac{-1}{\varepsilon})}. \quad (2.2.3)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist $u_a = ax + 1 - a + \dots$ eine gute Approximation, somit soll die RB in $x = 1$ erfüllt sein. Das Gebiet, wo die Lösung nicht gleichmäßig ist, ist die Umgebung von $x = 0$.

Bild Seite 15.

2.2.1 Lösung mit MMAE

Exakte Lösung ist bekannt

Die Untersuchung der exakten Lösung 2.2.3 zeigt, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, \varepsilon) = u_0(x) = ax + 1 - a,$$

mit Ausnahme der Umgebung um $x = 0$, wo $u_0(0) = 1 - a$ statt $u_0(0) = 0$ gilt.

Vorgehensweise:

1. Einführung der Grenzschichtvariablen (mathematische Lupe)

Einführung der Variablen $X = x/\varepsilon$ statt x (sie deckt einen größeren Bereich in der Nähe von 0 ab als x): $0 \leq X \leq \frac{1}{\varepsilon}$

In dieser neuen Variablen sieht die exakte Lösung folgendermaßen aus:

$$U(X, \varepsilon) = \varepsilon a X + (1 - a) \frac{1 - e^{-X}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(X, \varepsilon) = U_0(X) = (1 - a)(1 - e^{-X}).$$

Jetzt gilt $U_0|_{x=0} = 0, U_0|_{x=1} = (1 - a)(1 - e^{-1/\varepsilon})$.

2. Asymptotisches Anpassen (Matching):

$$\lim_{X \rightarrow \infty} U_0(X) = \lim_{x \rightarrow 0} u_0(x) = 1 - a.$$

Exakte Lösung ist nicht bekannt

$u_0(x) = ax + A$ ist die Lösung des reduzierten Problems.

Schritt 1: Die Bestimmung von A

Die Bestimmung von A , ohne zu wissen, wie die Lösung aussieht, gestaltet sich etwas schwieriger. Man weiß nicht, von welcher RB man A bestimmen soll und ob man

überhaupt A von einer RB bestimmt. Meistens bekommt man den Hinweis aus der Physik, falls man ein physikalisches Problem modelliert. Betrachtet man die Potentialströmung um einen Körper, so ist physikalisch klar, dass die Haftrandbedingung verletzt wird.

Zu erst nehmen wir an, wir wissen, welche Randbedingung verletzt wird, und verschieben die Diskussion auf später.

Annahme: $u_0 = ax + 1 - a$

Schritt 2: Wiederherstellung des Verhaltens um die verletzte RB durch Aufblasen

Einführung einer Variablen

$$X_\alpha = \frac{x}{\varepsilon^\alpha},$$

wobei $\alpha > 0$, so dass X_α beschränkt bleibt wenn x klein wird:

$$U_\alpha(X, \varepsilon) \equiv u(x, \varepsilon).$$

Einsetzen in 2.2.1 ergibt

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 U_\alpha}{dX_\alpha^2} + \varepsilon^{-\alpha} \frac{dU_\alpha}{dX_\alpha} = a. \quad (2.2.4)$$

Desweiteren muß der Parameter α abgestimmt werden: Ist $\alpha < 1$ oder $\alpha > 1$, so bekommt man eine Lösung, die die starke Variation der Lösung um die Null nicht beschreiben kann. $\alpha \neq 1/2$, sonst verschwindet die 2. Ableitung und die Dominanz zw. den Termen ergibt hier $\alpha = 1$.

Notation: $X_1 = X$ und $U_1 = U$

2.2.4 ergibt

$$\frac{d^2 U}{dX^2} + \frac{dU}{dX} = \varepsilon a.$$

Schritt 3:

Reduzierte Problem:

$$\frac{d^2 U_0}{dX^2} + \frac{dU_0}{dX} = 0$$

mit der Lösung $U_0(X) = A + Be^{-X}$. Die RB bei $x = 0$, $U_0(0) = 0$, ergibt

$$U_0(X) = A(1 - e^{-X}).$$

A lässt sich dann aus der 2. RB berechnen, $\lim_{X \rightarrow \infty} U_0(X) = 1$, also $A = 1$.

Nun haben wir aber eine falsche Lösung bekommen, das liegt daran, dass X einen zu großen Bereich abdeckt. Genau so wie die Approximation $u_0(x)$ nicht gültig in $x = 0$ ist, ist auch $U_0(X)$ nicht gültig, wenn X nicht beschränkt ist, vor allem in der Umgebung von $x = 1$.

Schritt 4: Existenz eines Überlappungsgebietes

Es muß somit ein Überlappungsgebiet existieren, so dass das Verhalten von $u_0(x)$ für kleine x mit $U_0(X)$ für große X übereinstimmt. Man sucht also ein Zwischengebiet beschrieben durch $X_\beta = \frac{x}{\varepsilon^\beta}$. Mit $0 < \beta < 1$:

$$u_0(x) = 1 - a + a\varepsilon^\beta X_\beta = 1 - a + \dots,$$

$$U_0(X) = A(1 - e^{-X_\beta/\varepsilon^{1-\beta}}) = A + \dots$$

Für X_β fix und $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt dann $A = 1 - a$.

Asymptotisches Matching:

$$\lim_{X \rightarrow \infty} U_0(X) = \lim_{x \rightarrow 0} u_0(x).$$

Schritt 5: Einheitliche Approximation

$$u_{\text{approx}} = u_0(x) + U_0(X) - (1 - a),$$

so dass hier

$$u_{\text{approx}} = ax + (1 - a)(1 - e^{-X}).$$

Bild Seite 19.

2.2.2 Lösung mit SCEM

Auf der Suche nach einer einheitlichen asymptotischen Lösung macht man folgenden Ansatz:

$$u_{a1} = u_0(x) + U_0^*(X),$$

wobei $u_0(x) = ax + A$ die Lösung des reduzierten Problems $L_0 u_0 = 0$ ist. Einsetzen in ?? ergibt

$$L_\varepsilon u_{a1} = \varepsilon \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{du_0}{dx} - a + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{d^2 U_0^*}{dX^2} + \frac{dU_0^*}{dX} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{d^2 U_0^*}{dX^2} + \frac{dU_0^*}{dX} \right] = 0.$$

Hier handelt es sich um einen Spezialfall, da hier $\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0$.

Lösung:

$$U_0^*(X) = A + Be^{-X}.$$

An U_0^* stellt man dann folgende Bedingung, damit die RB erfüllt sind:

$$U_0^*(0) = a - 1 \quad \text{und} \quad U_0^*\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Es folgt

$$U_0^*(X) = (1 - a) \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-X}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Mit u_{a1} bekommen wir somit die exakte Lösung.

Diese Verfahren war bisher nicht üblich, da jetzt $U_0^*(X)$ nicht nur von X sondern auch von ε abhängt. Bei den meisten Methoden werden die Funktionen, die von ε abhängen von denen, die nicht von ε abhängen streng separiert. Dass man bei $U_0^*(X)$ die ε -Abhängigkeit zulässt, führt zu den sogenannten SCEM.

Wir wollen nun die hier erhaltene Approximation mit der vorherigen (MMAE) vergleichen. Dazu vernachlässigen wir die ε -Terme in $U_0^*(X)$, die sehr klein sind und erhalten:

$$U_0^*(X) = (a - 1)e^{-X}.$$

Addiert man diese Lösung zu u_0 erhält man dieselbe Approximation wie mit der vorherigen Methode:

$$u_{\text{app}} = ax + (1 - a)(1 - e^{-X}).$$

Gibt es eine Unabhängigkeit bzgl. ε , so ist SCEM äquivalent zu MMAE. MMAE einfacher. Das asymptotische Matching ist äquivalent zur angenommenen Form der Approximation bei SCEM.

2.2.3 Lösung mit der Mehrskalennmethode

1. Schritt: Gleiche Idee wie bei SCEM: für eine allgemein gültige asymp. Lösung braucht man eine zweite Variable X . Hier setzt man voraus, dass beide Variablen unabhängig sind:

$$u(x, \varepsilon) = U(x, X, \varepsilon) \text{ mit } X = \frac{x}{\varepsilon}.$$

?? wird zur PDE auf dem Viereck $[0, 1] \times [0, \frac{1}{\varepsilon}]$, da

$$\begin{aligned} u' &\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x}U + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial X}U \\ u'' &\rightsquigarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X}U + \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}U \end{aligned}$$

2. Schritt: Einsetzen in ?? ergibt folgende PDE:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial U}{\partial X} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial X} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varepsilon a,$$

mit $0 \leq x \leq 1, 0 \leq X \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Die RB reicht für die Bestimmung einer Lösung nicht aus.

3. Schritt: Man sucht eine Approximation der Form:

$$U(x, X, \varepsilon) = U_0(x, X) + \varepsilon U_1(x, X) + \dots$$

Dieser Ansatz unterscheidet sich vom Ansatz der SCEM Methode, er entspricht einer asymptotischen Entwicklung, die aus einer Potenzreihe in ε gebildet wird, wie wir später sehen werden.

Einsetzen in ?? ergibt:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0 + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial X} + \frac{\partial}{\partial x} U_0 \right) + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial X} + \frac{\partial}{\partial x} U_1 \right) + \frac{\partial^2}{\partial X^2} U_0 + \frac{\partial}{\partial X} U_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} U_1 + \frac{\partial}{\partial X} U_1 \right) + \dots = \varepsilon a$$

4. Schritt: Aufspalten in ε -Potenzen:

Gleichung für U_0 :

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \frac{\partial U_0}{\partial X} = 0$$

mit $U_0(0, 0) = 0$ und $U_0(1, \infty) = 1$. Lösung: $U_0(x, X) = A(x) + B(x)e^{-X}$. Aus den RB: $A(0) + B(0) = 0, A(1) = 1$.

Gleichung für U_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2} + \frac{\partial U_1}{\partial X} &= a - \left(2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial X} + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2} + \frac{\partial U_1}{\partial X} &= a - \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} e^{-X} \\ U_1(x, X) &= C(x) + D(x)e^{-X} + X\left(a - \frac{dA}{dx}\right) - \frac{dB}{dx} X e^{-X}.\end{aligned}$$

Diese allgemeine Form von U_1 erhält man durch die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

5. Schritt: Poincaré-Lighthill: höhere Approximationen sollen nicht singulärer sein als die erste, d.h. U_1/U_0 soll beschränkt sein, unabhängig von ε .

$$a - \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow A(x) = ax + A$$

$$\frac{dB}{dx} = 0.$$

Aus den RB $A(1) = 1$ und $A(0) = 1 - a$ ist folglich $A(x) = ax + 1 - a$ und $B(x) = a - 1$.

$$U_0(x, X) = ax + (1 - a)(1 - e^{-X}).$$

2.3 Ordnungssymbole

2.3.1 Definition von Vergleichsfunktionen

Eine asymptotische Entwicklung hängt von der verwendeten asymptotischen Reihe, die aus sogenannten Vergleichsfunktionen gebildet wird, ab. Wir verwenden eine Menge von Funktionen, für die es eine totale Ordnung gibt, um stets zwei Elemente der Menge vergleichen zu können.

Ordnungsrelationen sind Verallgemeinerungen der \leq -Beziehung. Sie erlauben es, Elemente einer Menge miteinander zu vergleichen.

Definition 2.3.1. Sei E eine Menge reeller Funktionen $\delta(\varepsilon)$, strikt positiv und stetig in $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, so dass

1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$ existiert (es kann auch $\delta(\varepsilon) \rightarrow \infty$)
2. $\forall \delta_1 \in E, \forall \delta_2 \in E, \delta_1 \delta_2 \in E$.

Eine Funktion $\delta(\varepsilon) \in E$ nennt man **Vergleichsfunktion**.

Das Produkt von Vergleichsfunktionen definiert ein internes Gesetz auf der Menge E .

Bemerkung: Ist $\delta(\varepsilon)$ eine Vergleichsfunktion, so ist auch $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ eine Vergleichsfunktion.

Beispiele:

$$\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^3, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}, 1 + \varepsilon$$

Gegenbeispiel:

$$1 + \sin^2(1/\varepsilon), \varepsilon(1 + \sin^2(1/\varepsilon)).$$

2.3.2 Vergleich von Vergleichsfunktionen

Hardy's Notation:

1. $\delta_1 \preceq \delta_2$, d.h. δ_1 ist asymptotisch kleiner oder gleich δ_2 ,

$$\delta_1 \preceq \delta_2 \iff \frac{\delta_1}{\delta_2} \text{ ist beschränkt für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. $\delta_1 \prec \delta_2$, d.h. δ_1 ist asymptotisch kleiner als δ_2 ,

$$\delta_1 \prec \delta_2 \iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{\delta_2} = 0.$$

3. $\delta_1 \approx \delta_2$, d.h. δ_1 ist asymptotisch gleich δ_2 ,

$$\delta_1 \approx \delta_2 \iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{\delta_2} = \lambda \ (\lambda > 0 \text{ und beschränkt}).$$

$\delta_1 \cong \delta_2$, d.h. δ_1 ist asymptotisch identisch δ_2 ,

$$\delta_1 \cong \delta_2 \iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{\delta_2} = 1.$$

Beispiele:

1. $\varepsilon^2 \preceq \varepsilon$, $2\varepsilon^2 \preceq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $e^{-1/\varepsilon} \preceq \varepsilon^2$, $\varepsilon^3 \preceq \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}$.

2. $\varepsilon^2 \prec \varepsilon$, $e^{-1/\varepsilon} \prec \varepsilon^2$, $\varepsilon^3 \prec \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}$.

3. $2\varepsilon^2 \approx \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $\varepsilon^2 \cong \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

2.3.3 Totale Ordnung

Definition 2.3.2. Sei R die Relation definiert in der Menge E durch

$$R(\delta_1, \delta_2) : \delta_1 \approx \delta_2 \text{ oder } \delta_1 \prec \delta_2.$$

(E, R) ist eine **geordnete Menge**.

R ist reflexiv, transitiv und schiefsymmetrisch

Durch R ist eine totale Ordnung auf E definiert.

Eine (totale) Ordnung auf einer abzählbaren Menge liefert eine Anordnung der Elemente in einer bestimmten Reihenfolge.

Beispiel 2.3.3. Das Alphabet A, B, C, \dots, Z ist eine total geordnete Menge. Die Reihenfolge ist willkürlich festgelegt, und jede andere Reihenfolge wäre ebenfalls eine Ordnung.

Ohne dem internen Gesetz auf E wäre die Ordnung nicht total und man könnte nicht alle Funktionen mit R vergleichen. Totale Ordnung bedeutet somit, dass man zwei beliebige Elemente einer Menge stets miteinander vergleichen kann.

2.3.4 Ordnung einer Funktion

Bei einer Reihenentwicklung bedient man sich einer symbolischen Schreibweise: Einige wenige Glieder werden explizit angeschrieben und das Vorhandensein weiterer Glieder durch Pünktchen ersetzt. Mehr Klarheit bekommt man, wenn man die Pünktchen durch **Ordnungssymbole (Landausche Symbole)** ersetzt.

Voraussetzung:

Sei $\varphi(x, \varepsilon) : D \rightarrow IR$ eine reelle Funktion, $x \in IR^m$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ und $\|\varphi\|$ die Norm von φ auf D , und sei $\delta(\varepsilon)$ eine Vergleichsfunktion, mit der wir $\varphi(x, \varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ vergleichen wollen.

Landausche Notation:

1. $\varphi(x, \varepsilon) = O([\delta(\varepsilon)])$ in D , wenn es ein $K > 0$ gibt, das unabhängig von ε ist, so dass $\|\varphi\| \leq K\delta$, d.h. φ ist O von δ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Genaue Aussage über das asymptotische Verhalten von φ : Wenn $\delta(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen eine von Null verschiedene Konstante geht, muß auch $\varphi(x, \varepsilon)$ einer von Null verschiedener Konstante zustreben; wenn $\delta(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null oder Unendlich geht, muß $\varphi(x, \varepsilon)$ gleich stark gegen Null oder Unendlich gehen.

Beispiel: $\sin \varepsilon = O(\varepsilon)$ mit $K = 1$, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\sin \varepsilon\|}{\varepsilon} = 1$.

2. $\varphi(x, \varepsilon) = o([\delta(\varepsilon)])$ in D , wenn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\varphi\|}{\delta} = 0$, d.h. φ ist o von δ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Hier wird jene Größenrelation erfaßt, die bei 1. durch $K \neq 0$ ausgeschlossen wurde.

Beispiel: $\sin \varepsilon = o(1)$, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\sin \varepsilon\|}{1} = 0$, aber auch $\sin \varepsilon = o(\sqrt{\varepsilon})$.

Man sieht, dass man mit dem Symbol O mehr aussagt als mit o . o wird nur dann verwendet, wenn man zu wenig über das asymptotische Verhalten von der betrachteten Funktion weiß.

3. $\varphi(x, \varepsilon) = O_S([\delta(\varepsilon)])$ in D , wenn es ein $K > 0$ gibt, so dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\varphi\|}{\delta} = K$, d.h. φ ist strikt von Ordnung $\delta(\varepsilon)$.

Ist $\|\varphi\|$ eine Vergleichsfunktion, so sind Hardysche und Landausche Notationen äquivalent, und es gilt

1. $\varphi(x, \varepsilon) = O(\delta(\varepsilon)) \iff \|\varphi\| \preceq \delta$,
2. $\varphi(x, \varepsilon) = o(\delta(\varepsilon)) \iff \|\varphi\| \prec \delta$,
3. $\varphi(x, \varepsilon) = O_S(\delta(\varepsilon)) \iff \|\varphi\| \approx \delta$.

I. Allg. ist die Größenordnung einer Funktion von der Wahl der Norm abhängig.

Beispiel: $\phi(x, \varepsilon) = e^{-x/\varepsilon}$, $D = [0, 1]$

$$\|\varphi\|_{\infty} = O_S(1)$$

$$\|\varphi\|_{L^2} = O_S(\sqrt{\varepsilon})$$

Wir verwenden die Supremumsnorm, da diese noch eine zusätzliche Eigenschaft hat:

Eigenschaft 2.3.4. Ist $\varphi(x, \varepsilon) = O_S[\delta(\varepsilon)]$, dann gibt es ein beschränktes $K \neq 0$, so dass

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, |\varphi|_{\infty} \leq K\delta.$$

2.4 Asymptotische Folgen

Definition 2.4.1. Eine Folge von Vergleichsfunktionen δ_n heißt asymptotische Folge, wenn

$$\forall n, \delta_{n+1} \prec \delta_n.$$

Hier ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$, so dass wenn ε^n eine asymptotische Folge ist, ε^{α_n} auch eine asymptotische Folge ist nur wenn gilt

$$\forall n, \alpha_{n+1} > \alpha_n.$$

Funktionen, die sich in gewissen Aspekten ähneln, will man als gleichwertig ansehen. Eine Formalisierung ist der Begriff der Äquivalenzrelation.

Lemma 2.4.2.

Die Relation $\mathbf{r}: \delta_1 \approx \delta_2$ definiert auf E eine Äquivalenzrelation.

Beweis: reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Definition 2.4.3. Sei $\bar{E} = E/\mathbf{r}$ die Menge der Äquivalenzklassen (Klasse der Funktionen, die äquivalent sind).

Theorem 2.4.4.

Gegeben sei jedwelche asymptotische Folge. Es gibt unendlich viele Vergleichsfunktionen δ^* , so dass

$$\forall n, \delta^* \prec \delta_n.$$

Jede Funktion der Ordnung $\delta^*(\varepsilon)$ mit dieser Eigenschaft heißt asymptotisch äquivalent zu Null bzgl. der Folge δ_n .

Wenn man die Größenordnung einer Funktion bestimmt, oder sie mit einer anderen vergleichen will, ist es sinnvoll, sich einen Repräsentanten (engl. gauge function) aus einer Äquivalenzklasse auszusuchen. So kann man auf die Eindeutigkeit einer asymptotischen Entwicklung schließen, welche beim asymptotischen Matching eine große Rolle spielt.

2.5 Asymptotische Entwicklungen

2.5.1 Asymptotische Approximationen

Definition 2.5.1. Die Funktionen $\varphi(x, \varepsilon)$ und $\bar{\varphi}_1(x, \varepsilon)$ sind **asymptotisch identisch**, wenn sie von gleicher Ordnung sind und ihre Differenz vernachlässigbar, d.h.

$$\varphi = O_S(\delta_1), \bar{\varphi}_1 = O_S(\delta_1), \varphi - \bar{\varphi}_1 = O_S(\delta_2) \text{ mit } \delta_2 \prec \delta_1.$$

Idee: Man will eine komplizierte Funktion φ durch eine einfachere $\bar{\varphi}_1$ ersetzen. In diesem Fall haben wir eine Approximation $\bar{\varphi}_1$ von φ der Ordnung δ_1 erhalten.

Konstruktion:

1.

$$\varphi - \bar{\varphi}_1 = O_S(\delta_2) = o(\delta_1), \text{ mit } \delta_2 \prec \delta_1$$

Wir setzen $\bar{\varphi}_1 = \delta_1 \varphi_1$ mit δ_1 Vergleichsfunktion und $\varphi_1 = O_S(1)$.

2. Bessere Approximation:

$$\varphi - \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2 = O_S(\delta_3), \quad \text{mit } \delta_3 \prec \delta_2$$

Hier ist $\bar{\varphi}_2 = \delta_2 \varphi_2$ mit δ_1 Vergleichsfunktion und $\varphi_2 = O_S(1)$. Dann ist

$$\varphi = \bar{\varphi}_1 + \delta_2 \varphi_2 + O_S(\delta_3).$$

Fortsetzung führt zur AE mit m Termen:

$$\varphi = \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \varphi_n(x, \varepsilon) + o(\delta_m(\varepsilon)) \quad (2.5.1)$$

Definition 2.5.2. Eine Reihe, die 5.2.1 für alle m erfüllt, nennt man **asymptotische Reihe (Entwicklung)** der Funktion $\varphi(x, \varepsilon)$ nach ε .

Gilt (5.2.1) für ein endliches m , so hat man eine **asymptotische Entwicklung** mit m Terme. Die Anzahl der Terme ist nicht wichtig. Wichtig ist, dass die AE von der Ordnung δ_m ist.

Genauer gilt:

$$\varphi = \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \varphi_n(x, \varepsilon) + O_S(\delta_{m+1}(\varepsilon))$$

mit $\varphi_n(x, \varepsilon) = O_S(1)$ und $\delta_{n+1} \prec \delta_n$.

Reguläre und nicht reguläre AE

Seien $\varphi(x, \varepsilon)$ und $\varphi_1(x, \varepsilon)$ zwei stetige Funktionen in D (abgeschlossen u. beschränkt), $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, so dass

$$\varphi = O_S(\delta_1), \varphi_1 = O_S(1), \varphi = \delta_1 \varphi_1 + o(\delta_1),$$

dann ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(x, \varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} - \varphi_1(x, \varepsilon) \right| = 0.$$

Einen besonderen Fall haben wir, wenn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, \varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} = \varphi_1(x).$$

Die AE ist dann:

$$\varphi(x, \varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) \varphi_1(x) + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Definition 2.5.3. Eine Funktion φ mit dieser Eigenschaft heißt **reguläre Funktion**.

Die asymptotische Approximation $\bar{\varphi}_1(x, \varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) \varphi_1(x)$ einer regulären Funktion $\varphi(x, \varepsilon)$ ist einfacher zu bestimmen.

Diese Eigenschaft gilt aber nicht automatisch für die höheren Ordnungen.

Definition 2.5.4. Wenn man in jedem Konstruktionsschritt einer AE eine reguläre Funktion erhält, d.h.

$$\forall h < m, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, \varepsilon) - \sum_{i=1}^h \delta_i(\varepsilon) \varphi_i(x)}{\delta_{h+1}(\varepsilon)} = \varphi_{h+1}(x),$$

dann ist die **AE regulär**.

Definition 2.5.5. Eine nichtreguläre AE heißt **allgemeine AE**.

Beispiel 2.5.6.

$$\varphi(x, \varepsilon) = \frac{1}{1 - \varepsilon x}$$

Allgemeine AE:

$$\varphi(x, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=0}^m \varepsilon^{2n+1} x^{2n+1} (1 + \varepsilon x) + O(\varepsilon^{2m+3}).$$

Reguläre AE:

$$\varphi(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^m \varepsilon^n x^n + O(\varepsilon^{m+1}).$$

Eigenschaft 2.5.7. Zwei verschiedene reguläre asymptotische Approximationen

$$\varphi(x, \varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) \varphi_1(x) + o(\delta_1(\varepsilon))$$

und

$$\varphi(x, \varepsilon) = \bar{\delta}_1(\varepsilon) \bar{\varphi}_1(x) + o(\bar{\delta}_1(\varepsilon)),$$

dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{\delta}_1(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} = c$$

und

$$\varphi_1(x) = c \bar{\varphi}_1(x)$$

Konvergenz und Genauigkeit

Ein bekanntes Beispiel einer AE einer Funktion $\varphi(\varepsilon) \in C^m(D)$ ist ihre Taylor Reihe:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + \dots + \varepsilon^m \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + O_S(\varepsilon^{m+1}).$$

Wird m Unendlich, so erhält man eine Reihe, die konvergent oder divergent sein kann. Wenn die Reihe konvergiert, so muß sie nicht unbedingt zur Funktion $\varphi(\varepsilon)$ konvergieren. Per Definition ist der Fehler einer AE der Größenordnung des ersten weggelassenen Terms und konvergiert schnell gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$. Bei divergenter Reihe kann der Fehler wieder größer werden.

Eine AE verhält sich anders als eine Reihe. Sie hat im Gegensatz dazu meistens endlich viele Terme. Auch bei einer AR hat die Konvergenz der Reihe nichts mit dem Verhalten der Funktion für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu tun.

Beispiel 2.5.8. Die Taylor Reihe

$$e^\varepsilon = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + \frac{\varepsilon^m}{m} + \dots$$

konvergiert $\forall \varepsilon$. Die AE

$$\varphi(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + \frac{\varepsilon^m}{m} + O_S(\varepsilon^{m+1})$$

ist gültig nur in der Umgebung von $\varepsilon = 0$, sonst nicht.

Beispiel 2.5.9.

$$f(x, \varepsilon) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\varepsilon x}, \quad 2 \leq x \leq 3.$$

AR:

$$g(x, \varepsilon) = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^m \varepsilon^m \frac{x^m}{m!} + \dots$$

AE:

$$f_{app} = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 \frac{x^2}{2}.$$

Der relative Fehler geht gegen Null:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|f_{app} - f|}{f} = 0,$$

auch wenn g nicht gegen f konvergiert, sondern

$$g = e^{-\varepsilon x}.$$

Die Reihe g ist eine asymptotische Approximation von f für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Genauigkeit

Paradoxe Bemerkung: Die Information in den ersten Termen einer AE ist genauer, wenn die Reihe divergent ist. Also konvergiert eine divergente Reihe schneller als eine konvergente Reihe. Man darf aber nicht zu viele Terme betrachten, da sonst die Approximation wieder schlechter wird, da die Reihe divergiert. Die Anzahl von Terme, die eine gute Genauigkeit sichern hängt von ε ab. Je mehr Terme in einer divergenten AE, um so kleiner muß ε gewählt werden.

Generell ist die Qualität einer AE in einem physikalischen Modell nicht voraussagbar. Eine gute Intuition bleibt immer hilfreich. Z.B.

$$\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + O(\varepsilon^5)$$

und

$$\sin(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2/6} + O(\varepsilon^5).$$

Im zweiten Fall kann man die gleiche Genauigkeit mit einem Term bekommen als oben mit zwei. Das liegt an der Wahl des Repräsentanten aus der Klasse der Vergleichsfunktionen.

Beispiel 2.5.10.

$$f(x) = \frac{1}{x} - f'(x)$$

exakte Lösung: $f = e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \int_{x_0}^{\frac{1}{\varepsilon}}$

AE: $f_{app} = \varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + \dots + (m-1)!\varepsilon^m$

Es gilt: $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{app} = \infty$, d.h. die Approximation wird schlecht, wenn man zu viele Terme betrachtet, da die Reihe divergiert.

Operationen

Wir suchen die approximierte Lösung einer PDE. Dabei wird die AE in die PDE eingesetzt. Hier müssen wir voraussetzen, dass die elementaren Operationen (+, -, *, :) zulässig sind. Die Integration ist auch zulässig, die Differentiation aber nicht. Das liegt am Singularitätsverhalten.

Konstruktion

Die Konstruktion einer AE ist die Bestimmung einer asymptotischen Reihe von Vergleichsfunktionen. Wir verwenden hier die Menge E von Vergleichsfunktionen, auf der eine totale Ordnung definiert ist. Die Wahl der Vergleichsfunktionen kann sich auf eine Teilmenge von E beschränken, auf der die totale Ordnung erhalten bleibt. Nicht immer ist die Konstruktion der asymptotischen Reihe von Vergleichsfunktionen einfach. Manchmal muß man sie Term für Term parallel mit der AE konstruieren. Um Eindeutigkeit der Reihe zu erhalten benutzt man sogenannte Repräsentanten einer Äquivalenzklasse.

Bei SCEM verwendet man allgemeine AE.

Die Konvergenz einer Reihe ist hier nicht ausschlaggebend. Wenn man Strömungsprobleme mit der Methode der asymptotischen Entwicklung zu lösen versucht, kann man fast nie eine Aussage über deren Konvergenz machen. Man kann nur wenige Reihenglieder der gesuchten Lösung bestimmen, da der Aufwand zu groß wird. Außerdem ist nicht das Verhalten der Reihe für $n \rightarrow \infty$ bei endlichem ε von Interesse, sondern das Verhalten der Reihe für $\varepsilon \rightarrow 0$ bei endlichem n.

Vorgehensweise:

1. Gleichung in dimensionsloser Form bringen und Festlegung des Störparameters
2. Ansatz: asymptotische Reihe für jede Abhängige Variable (Vorsicht: ganzzahlige Potenzen von ε nicht immer korrekt, d.h. unbestimmte Vergleichsfunktionen ansetzen, die im Verlaufe der Rechnung bestimmt werden)
3. Einsetzen der Reihenansätze in die Gleichung
4. Umordnung der Gleichung in Größenordnungen des Störparameters
5. Aufspaltung der einzelnen Gleichungen in ein System von Störgleichungen

Beispiel 2.5.11. Oseen Widerstand einer Kugel:

$Re \ll 1$, Stokes Strömung, für symmetrische Körper gilt die Oseen Strömung (Goldstein 1929, letzter Term durch Shanks korrigiert 1955):

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 r^2} = \frac{6\pi}{Re} \left(1 + \frac{3}{8} Re - \frac{19}{320} Re^2 + \frac{71}{2560} Re^3 - \frac{30179}{2150400} Re^4 + \frac{122519}{17203200} Re^5 + \dots \right)$$

Für die Navier-Stokes Gleichung gilt:

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 r^2} = \frac{6\pi}{Re} \left(1 + \frac{3}{8} Re - \frac{9}{40} Re^2 \log Re + O(Re^2) \right)$$

Prandtl Grenzschichtgleichungen (Koordinatenstörung für kleine Abstände):

$$C_f = \frac{2\tau}{\rho U^2} = \frac{2}{\sqrt{Re}} \left(1.23259 \frac{x}{r} - 1.93186 \frac{x^3}{r} + 3.11051 \frac{x^5}{r} - 5.02892 \frac{x^7}{r} + 8.14109 \frac{x^9}{r} - 13.186662 \frac{x^{11}}{r} + \dots \right)$$

X: Abstand entlang der Oberfläche r: Radius zur Nase

Viele Probleme der Strömungsmechanik führen zu AE in Form von Potenzreihen. Solche Entwicklungen scheitern oft, da sie Terme, die exponentiell kleiner sind als alle Terme der Entwicklung nicht fassen können. Wenn diese Terme auch noch so klein sind, sind sie oft von physikalischer Bedeutung.

Chapter 3

Asymptotische Methoden

3.1 MMAE - Method of Matched Asymptotic Expansions

AE beruhen auf Prandtls Grenzschichttheorie. Die Strömung hoher Re kann als Approximation einer Potentialströmung konstruiert werden mit Ausnahme eines kleinen Bereiches direkt an der Wand, wo die Viskosität betrachtet werden muß. Beide Approximationen müssen in einem Zwischenbereich angepaßt werden. Dieses sogenannte asymptotische Matching wird benutzt, um die gleichmäßige Approximation einer Lösung und um analytisch die approximierten globalen Eigenschaften der Lösung einer DGL zu bestimmen.

Grundlegende Idee: 50er anhand Friedrichs Modelln (ODE)

Erweiterung: Modelle für viskose Strömungen (Kaplun, Lagerstrom, Cole, Van Dyke, Eckhaus)

Bis heute gibt es keine allgemein gültige Theorie, eher heuristische Regeln, die man problemspezifisch anpasst.

Prinzip: Das Lösungsintervall einer RWA wird in eine Reihe von zwei oder mehreren sich überlappenden Teilintervallen unterteilt. Auf jeden Teilintervall wird mit Hilfe der Störungstheorie eine Lösung bestimmt. Beim Matching verlangt man, dass die asympt. Lösungen im Überlappungsgebiet das selbe Funktional repräsentieren.

Bisher haben sich mehrere Varianten des Matching herauskristallisiert:

- Matching zwischendurch
- Van Dyke Prinzip (VDP), puzzelartig
- Modifiziertes Van Dyke Prinzip, MVDP

3.1.1 Entwicklungsoperator

Gegeben sei eine Funktion $\Phi(x, \varepsilon) : D \rightarrow \mathbb{R}$ und die reguläre asymptotische Entwicklung (Poincaré Entwicklung):

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \delta_0^{(i)}(\varepsilon) \Phi_0^{(i)}(x) + o(\delta_0^{(n)}),$$

wobei $\delta_0^{(i)}$ eine asymptotische Folge von Ordnungsfunktionen ist.

Definition 3.1.1. Ein **Entwicklungsoperator** $E_0^{(n)}$ ist ein Operator, der die asymptotische Approximation von Φ zur Ordnung $\delta_0^{(n)}$ ausdrückt:

$$\Phi - E_0^{(n)}\Phi = o(\delta_0^{(n)}),$$

wobei hier folgende Notation eingeführt wird:

$$\Phi(x, \varepsilon) \cong E_0^{(n)}\Phi.$$

Somit ist

$$E_0^{(n)}\Phi = \sum_{i=1}^n \delta_0^{(i)}(\varepsilon)\Phi_0^{(i)}(x)$$

eine asymptotische Entwicklung (AE) mit n Termen, wobei die Ordnung der AE der ausschlagbare Punkt ist.

Der hochgestellte Index (n) weist auf die Anzahl der (nicht verschwindenden) Glieder hin, bis zu welchen die jeweilige Entwicklung vorangetrieben wird.

Will man die reguläre AE von Φ für $m \leq n$ haben, reicht es, wenn man $E_0^{(n)}\Phi$ hat.

Benutzt man Vergleichsfunktionen, gilt

$$E_0^{(m)}E_0^{(n)}\Phi = E_0^{(m)}\Phi + o(\delta_0^{(m)}).$$

Ist außerdem $\delta_0^{(i)}(\varepsilon)$ ein Repräsentant einer Klasse (Eichfunktion), dann kann man die asymptotische Gleichung durch eine strikte Gleichung ersetzen, die für das matching nützlich sein wird.

$$E_0^{(m)}E_0^{(n)}\Phi = E_0^{(m)}\Phi.$$

3.1.2 Äußere und innere Entwicklung

In Abschnitt 2.2.1 haben wir bereits gesehen, wie diese Methode anhand Friedrichs Modell funktioniert (allerdings ohne Operatorschreibweise). Wir haben für $\varepsilon \rightarrow 0$ zwei Entwicklungen durchgeführt, deren wesentlicher Unterschied darin zu sehen ist, dass einmal die Koordinate x und das andere Mal die Koordinate $X = x/\varepsilon$ bei der Entwicklung nach ε festgehalten wurde. Die Entwicklung bei festem x ist nur für $1/x = O(1)$ gültig, nicht in der Umgebung der Singularität. Ist Φ nicht regulär in $x \in D$, d.h. die AE von Φ gilt nur in einem Teilgebiet $D_0 \in D$, dann heißt die AE bei festem x **äußere Entwicklung** und die damit assoziierte Variable x nennt man **äußere Variable**. Die Entwicklung bei festem X ist für $X = O(1)$ oder $x = O(\varepsilon)$ gültig. Die AE bei festem X heißt **innere Entwicklung** und die damit assoziierte Variable X **innere Variable**.

Entsprechende Bezeichnungen werden auch für die aus den Entwicklungen erhaltenen Lösungen verwendet.

Dieser Ansatz erlaubt die Konstruktion zweier regulärer AE, also auch in der Umgebung der Singularität. Äußere und innere Entwicklung sind nicht gleichberechtigt. Während die innere Entwicklung direkt zu einer eindeutig bestimmten ersten Näherung führt, bleibt bei der äußeren Entwicklung noch eine Konstante unbestimmt, die erst durch Anpassen der äußeren Entwicklung an die innere Entwicklung festgelegt werden kann.

Definition 3.1.2. $\Phi(x, \varepsilon)$ ist auf D definiert, so dass $0 \leq x \leq B_0$ und $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, dann ist die reguläre AE

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \delta_0^{(i)}(\varepsilon) \Phi_0^{(i)}(x) + o(\delta_0^{(m)})$$

eine äußere Entwicklung.

Definition 3.1.3. $\Phi(X, \varepsilon)$ ist auf D definiert, so dass $0 < X < \frac{B_0}{\varepsilon}$ und $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, dann ist die reguläre AE

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \bar{\delta}_0^{(i)}(\varepsilon) \bar{\Phi}_0^{(i)}(X) + o(\delta_0^{(m)})$$

eine innere Entwicklung.

Sei $E_0^{(m)}$ eine äußere Entwicklung mit m Termen, so dass :

$$\Phi - E_0^{(m)}\Phi = o(\delta_0^{(m)})$$

und $E_1^{(n)}$ eine innere Entwicklung mit n Termen, so dass :

$$\Phi - E_1^{(n)}\Phi = o(\delta_0^{(n)})$$

Die hochgestellten Indizes (n) und (m) weisen auf die Anzahl der (nicht verschwindenden) Glieder hin, bis zu welchen die jeweilige Entwicklung vorangetrieben wird.

Asymptotisches Anpassen

Um die freien Konstanten bestimmen zu können, müssen die beiden Entwicklungen in geeigneter Weise aneinander angepaßt werden. Hier gehen wir davon aus, dass es zwischen dem Gültigkeitsbereich der inneren und dem Gültigkeitsbereich der äußeren Entwicklung ein Überlappungsgebiet geben muß, in welchem die innere und äußere Lösung für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen dieselbe Funktion streben. Diese Forderung ist notwendig, wenn die beiden Entwicklungen eine glatte Funktion einschließlich ihrer Ableitungen in sinnvoller Weise approximieren sollen. Der Überlappungsbereich hat weder in inneren noch in äußeren Koordinaten eine endliche und von Null verschiedene Ausdehnung; er entspricht vielmehr einem endlichen Gebiet in neuen Koordinaten, deren Streckung zwischen jener der äußeren und inneren liegt, eine sogenannte Zwischenentwicklung.

Die einfachste Idee des asymptotischen Matching wurde von Friedrichs eingeführt: Die Zwischenentwicklungen von innerer und äußerer Entwicklung müssen übereinstimmen, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow 0} E_0^{(m)}\Phi = \lim_{X \rightarrow \infty} E_1^{(n)}\Phi.$$

In vielen Fällen stellt es sich heraus, dass $\lim_{X \rightarrow \infty} E_1^{(n)}\Phi$ unbeschränkt ist, so dass man mit der oben genannten Bedingung nicht weiter kommt. Van Dyke hatte die Idee, dass man das Verhalten der Entwicklung und nicht ihren tatsächlichen Grenzwert betrachten soll.

Definition 3.1.4. Im folgenden benutzen wir den Begriff **äußerer Grenzwertprozess** für $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, x \text{ fix}}$, **innerer Grenzwertprozess** für $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, X \text{ fix}}$ und **Zwischengrenzwertprozess** für $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, x, \nu \text{ fix}}$.

Definition 3.1.5. Eine (n)-Term innere AE einer (m)-Term äußeren AE, $E_1^{(n)}E_0^{(m)}\Phi$ bedeutet die Durchführung folgender Rechenschritte:

- Umschreiben von $E_0^{(m)}\Phi$ in die innere Variable X
- asymptotisch entwickeln für kleine ε
- Anschneiden der erhaltenen Entwicklung nach m Terme

Die äußere AE $E_0^{(m)}\Phi$ ist eine Funktion von x und ε , deren Verhalten durch den inneren Grenzwertprozess bestimmt werden kann, d.h. man bildet $E_1^{(n)}E_0^{(m)}\Phi$. Das gleiche gilt umgekehrt: Die innere AE $E_1^{(n)}\Phi$ ist eine Funktion von X und ε , deren Verhalten durch den äußeren Grenzwertprozess bestimmt werden kann, d.h. man bildet $E_0^{(m)}E_1^{(n)}\Phi$. Hier erhält man einen Ausdruck, auch wenn dessen Grenzwert nicht existiert. Van Dykes Matching Prinzip besagt, das das Verhalten der beiden Ausdrücke gleich sein muß:

$$E_1^{(n)}E_0^{(m)}\Phi \equiv E_0^{(m)}E_1^{(n)}\Phi.$$

Bemerkung: Benutzt man keine Eichfunktionen in den AE, so müßte man \equiv durch \cong (asymptotisch identisch) ersetzen.

Van Dykes Prinzip kann aber auch nicht immer angewendet werden. Eine weitere Methode hat sich unter dem Namen "Matching zwischendurch" durch Kaplun und Lagerstrom bewährt. Hypothese: Es existiert ein Überlappungsgebiet, wo die zwei AE übereinstimmen:

Einführung der Zwischenvariablen:

$$x_\delta = \frac{x}{\delta(\varepsilon)}, \quad 0 < C_1 \leq x_\delta \leq C_2$$

mit $\varepsilon \prec \delta(\varepsilon) \prec 1$.

Konstruktion der AE mit dieser Zwischenvariablen, $E_\delta\Phi$

Bildung von: $E_\delta E_0^{(m)}\Phi$ und $E_\delta E_1^{(n)}\Phi$

Matching: $E_\delta\Phi = E_\delta E_0^{(m)}\Phi = E_\delta E_1^{(n)}\Phi$

Attraktive Idee, aber kann sehr komplex werden und es ist nicht voraussagbar, ob es funktioniert.

Für die mathematische Korrektheit müssen wir in Betracht ziehen, dass die äußere und die innere AE nicht im gleichen Gebiet definiert sind.

Verallgemeinerter Entwicklungsoperator

Sei $D = [0, B_0] \times [0, \varepsilon_0]$ und $\Phi(x, \varepsilon)$ eine Funktion in diesem Gebiet. Die reguläre äußere AE ist gegeben durch

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \delta_0^{(i)}(x) + o(\delta_0^{(n)}).$$

Annahme: Singularität ist bei $x = 0$

Die AE ist a priori eine Approximation von Φ zur gegebenen Ordnung nur im Gebiet $D_0 = [A_0, B_0] \times [0, \varepsilon_0]$. Kapluns Fortsetzungstheorem zeigt, dass die AE in einer Umgebung der 0 fortgesetzt werden kann, wenn eine geringere Genauigkeit akzeptiert wird.

Lokale Variable:

$$x_\nu = \frac{x}{\delta_\nu}(\varepsilon)$$

mit $\delta_\nu(\varepsilon) = o(1)$ außer für $\nu = 0$ ($x = x_0$): $\delta_0(\varepsilon) = 1$.

δ_ν ist eine asymptotische Folge, so dass für wachsendes ν das Gebiet immer näher zur 0 rückt.

Asymptotische Gebiete: $D_\nu = [A_\nu, B_\nu] \times [0, \varepsilon_0]$

Annahme: In jedem Schritt kann eine AE von $\Phi(x, \varepsilon)$ konstruiert werden:

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \delta_\nu^{(i)}(\varepsilon) \Phi_\nu^{(i)}(x_\nu) + o(\delta_\nu^{(m)}(\varepsilon)).$$

Definition 3.1.6. Ein **Entwicklungsoperator** $E_\nu^{(n)}$ ist ein Operator, der die asymptotische Approximation von Φ zur Ordnung $\delta_\nu^{(n)}$ ausdrückt:

$$\Phi - E_\nu^{(n)}\Phi = o(\delta_\nu^{(n)}),$$

$$E_\nu^{(n)}\Phi = \sum_{i=1}^n \delta_\nu^{(i)}(\varepsilon) \Phi_\nu^{(i)}(x)$$

ist eine reguläre asymptotische Entwicklung (AE) mit n Termen.

Spezifizierung des Entwicklungsoperators zur Ordnung δ :

$$\Phi - E_\nu^{(n)}\Phi = o(\delta).$$

Wenn die Anzahl der Terme in der AE keine besondere Rolle spielt, verwenden wir:

$$\Phi - E_\nu\Phi = o(\delta).$$

Definition 3.1.7. Gegeben sind zwei AE in verschiedenen Gebieten D_μ und D_ν . $E_\nu\Phi$ enthält $E_\mu\Phi$, wenn gilt

$$E_\mu E_\nu\Phi = E_\mu\Phi.$$

Für reguläre Funktionen gilt: Die äußere Entwicklung enthält jede Zwischenentwicklung: $E_\mu E_0\Phi = E_\mu\Phi$. Für eine singuläre Funktion gilt das nicht, dort gibt es ein μ , so dass $E_\mu E_0\Phi \neq E_\mu\Phi$. Die innere Entwicklung ist nicht in der äußeren enthalten.

Eine innere Entwicklung ist eine Primärentwicklung, sie ist in keiner anderen Entwicklung zur selben Ordnung enthalten (nötige aber nicht hinreichende Bedingung).

Die Beziehung zwischen den verschiedenen AE, $E_0\Phi$, $E_1\Phi$ und $E_\nu\Phi$, $0 < \nu < 1$, stellen die Regeln dar, die das sogenannte asymptotische Matching definieren.

3.1.3 Asymptotisches Matching

Kapluns Fortsetzungstheorie

Gegeben sei eine singuläre Funktion Φ und eine äußere AE $E_0\Phi$ der Ordnung 1 in $A_0 \leq x \leq B_0 + 1$. Das Fortsetzungstheorem von Kaplun besagt, dass der Gültigkeitsbereich der AE in einem gewissen Sinne erweitert werden kann.

Theorem 3.1.8.

Unter den oben genannten Voraussetzungen gilt in einem noch zu bestimmenden Sinn:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\Phi - E_0\Phi] = 0,$$

für $\delta(\varepsilon) \leq x \leq 1$, wobei $\delta(\varepsilon)$ eine Vergleichsfunktion ist, so dass $\delta(\varepsilon) \prec 1$, d.h. im Intervall $[\delta(\varepsilon), 1]$ konvergiert die AE gleichmäßig zur Funktion Φ .

Die Genauigkeit der AE nimmt ab, je näher man zur Singularität kommt.

Theorem 3.1.9.

Gegeben ist die AE $E_\nu\Phi$ von Φ in D_ν . Dieses Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz der AE kann erweitert werden: Es existiert eine Vergleichsfunktion $\delta_\mu \neq \delta_\nu$ und ein Gebiet D_μ , so dass $E_\nu\Phi$ in $E_\mu\Phi$ enthalten ist, d.h.

$$E_\mu E_\nu\Phi = E_\mu\Phi.$$

Beispiel 3.1.10. Gegeben ist die Funktion

$$\Phi(x, \varepsilon) = 1 + x + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Die innere Skala ist hier $x_n u = \frac{x}{\delta(\varepsilon)} = \frac{x}{\varepsilon^\nu}$. Bis zur Ordnung $O(1)$ gilt:

$$E_0\Phi = 1 + x \quad (\nu = 0)$$

$$E_\nu\Phi = 1 \quad (0 < \nu < 1)$$

$$E_1\Phi = 1 + e^{-X} \quad (\nu = 1)$$

Für ein $\mu \in]0, 1[$ sagt das Fortsetzungstheorem:

$$1 = E_\mu E_0\Phi = E_\mu\Phi = 1,$$

d.h. $E_0\Phi$ enthält $E_\mu\Phi$ und der Gültigkeitsbereich von $E_\mu\Phi$ erweitert sich zum Gültigkeitsbereich von $E_0\Phi$ und

$$1 = E_\mu E_1\Phi = E_\mu\Phi = 1,$$

d.h. $E_1\Phi$ enthält $E_\mu\Phi$ und der Gültigkeitsbereich von $E_\mu\Phi$ erweitert sich zum Gültigkeitsbereich von $E_1\Phi$.

Das gleiche gilt auch für $\mu > 1$: $2 = E_\mu E_1\Phi = E_\mu\Phi = 2$.

Überlappungsgebiet

Gegeben ist die reguläre äußere AE von Φ im Gebiet $0 < A_0 \leq x \leq 1$:

$$\Phi - E_0^{(n)}\Phi = o(\delta_0^{(n)}(\varepsilon)).$$

Fortsetzung dieser AE auf das Gebiet $x \in (\bar{\delta}, 1)$ mit $\bar{\delta} = o(1)$, so dass

$$\Phi - E_0^{(n)}\Phi = o(\delta^*), \quad \delta_0^{(n)} = O(\delta^*).$$

Innere AE von Φ im Gebiet $0 \leq x_1 \leq B_1$ mit innerer Variable $x_1 = x/\delta_1(\varepsilon)$:

$$\Phi - E_1^{(m)}\Phi = o(\delta_1^{(m)}(\varepsilon)).$$

Fortsetzung dieser AE auf das Gebiet $x \in (0, \tilde{\delta})$, so dass

$$\Phi - E_1^{(m)}\Phi = o(\delta^*), \quad \delta_1^{(m)} = O(\delta^*).$$

Theorem 3.1.11.

Ein Überlappungsgebiet existiert, wenn gilt

$$\bar{\delta} = o(\tilde{\delta}).$$

Für das Überlappungsgebiet gilt zur Ordnung $\delta^* \forall \delta_\nu$, so dass $\tilde{\delta} \succeq \delta_\nu \succeq \bar{\delta}$:

$$E_\nu\Phi = E_\nu E_0^{(n)}\Phi = E_\nu E_1^{(m)}\Phi$$

Regel von Eckhaus

Angenommen, die fortgesetzten Gültigkeitsgebiete der AE $E_0^{(k)}\Phi$ und $E_1^{(m)}\Phi$ überlappen sich, und diese stetigen, beschränkten Funktionen kann man zwischenmatchen; dann $\exists \delta_\nu, n$ und m , so dass $\forall k$:

$$E_\nu^{(k)}\Phi = E_\nu^{(k)} E_0^{(n)}\Phi = E_\nu^{(k)} E_1^{(m)}\Phi.$$

Asymptotische Anpassungsvorschrift nach Van Dyke

Man kann die etwas umständliche Zwischenentwicklung übergehen, wenn man die von Van Dyke angegebene asymptotische Anpassungsvorschrift anwendet: Die innere Entwicklung der äußeren Entwicklung muß mit der äußeren Entwicklung der inneren Entwicklung übereinstimmen, d.h.

$$E_1^{(n)} E_0^{(m)}\Phi \equiv E_0^{(m)} E_1^{(n)}\Phi$$

Die Anpassung geht schrittweise, um eventuelle Rückwirkungen der äußeren Entwicklung (Sekundäreffekte) zu erfassen.

Anpassungsschema:

$$E_0^{(1)} \longrightarrow E_1^{(1)} \longrightarrow E_0^{(2)} \longrightarrow E_1^{(2)} \longrightarrow E_0^{(3)} \longrightarrow \dots$$

Das Matching selbst sagt den nächsten Term in der AE voraus, er muß nicht von Anfang an erraten werden.

Die konstruierte Approximation ist:

$$\Phi_{app} = E_0^{(n)}\Phi + E_1^{(m)}\Phi - E_0^{(n)}E_1^{(m)}\Phi.$$

Die Terme haben hier nicht die gleiche Genauigkeit, d.h. die Genauigkeit von Φ_{app} ist die des am wenigsten genauen Terms.

Verändertes Van Dyke Prinzip (Mauss)

Formulierung des Van Dykes Prinzip mit AE, die die gleiche Ordnung haben:

$$E_0E_1\Phi \equiv E_1E_0\Phi.$$

Die konstruierte Approximation ist:

$$\Phi_{app} = E_0\Phi + E_1\Phi - E_0E_1\Phi.$$

Durch die Verwendung von Eichfunktionen gilt

$$E_0E_1\Phi = E_1E_0\Phi.$$

Will man den Gebrauch von X spezifizieren, so schreibt man

$$E_1E_0E_1\Phi = E_1E_0\Phi.$$

Das gleiche gilt für x :

$$E_0E_1\Phi = E_0E_1E_0\Phi.$$

Theorem 3.1.12.

Eckhaus Theorem angepasst auf MVDP: Unter den oben genannten Bedingungen, wenn es ein Überlappungsgebiet gibt, so dass zur Ordnung $\delta \succeq \delta_m$

$$E_\nu E_0\Phi = E_\nu E_1\Phi = E_\nu\Phi,$$

dann ist

$$E_0E_1\Phi \equiv E_1E_0\Phi,$$

und

$$\Phi = E_0\Phi + E_1\Phi - E_0E_1\Phi + o(\delta),$$

d.h. gibt es ein Überlappungsgebiet zur Ordnung δ , dann bekommt man eine Approximation der gleichen Ordnung.

Das VVDP ist von allgemeinerer Gültigkeit als das VDP. Wir werden später noch sehen, dass das VVDP ein Nebenprodukt der regulären Form der SCEM ist. Das VVDP ist anwendbar, wo das Zwischenmatching nicht klappt, wenn die innere und äußere AE zu einer gegebenen Ordnung vorgeschrieben ist.

3.1.4 Gleichmäßige Konvergenz

3.1.5 Matching an einem Beispiel

3.1.6 Friedrichs Modell mit dem neuen Formalismus

3.2 SCEM - Successive Complementary Expansion Method

Im Allgemeinen haben wir gesehen, dass man asymptotische Reihen in verschiedenen Gebiete benutzt und das Matching der verschiedenen Reihen eine große Rolle spielt. In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie man eine allgemein gültige asymptotische Reihe konstruiert, ohne die vielen Vorwärts und Rückwärtsschritte durchlaufen zu müssen. Hier wird die Argumentation der MMAE umgedreht: Zu erst wird eine allgemeine Struktur für die allgemein gültige AE angesetzt und danach eine Methode zu deren Konstruktion abgeleitet. Man braucht hier kein Matching.

Van Dyke bemerkte schon, dass es einfach ist, aus zwei AE, die im selben Gebiet gültig sind (Überlappungsgebiet) eine allgemeine AE zu konstruieren.

Gegeben sei eine allgemein gültige AE von Φ zur Ordnung $\bar{\delta}_n$:

$$\Phi_a(x, X, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i(\varepsilon) [\bar{\varphi}_i(x, \varepsilon) + \bar{\psi}_i(X, \varepsilon)],$$

so dass

$$\Phi = \Phi_a + o(\bar{\delta}_n).$$

Die AE ist so konstruiert, dass man sie schreiben kann als

$$\Phi = \Phi_{ar} + o(\delta_m),$$

wobei Φ_{ar} eine reguläre AE ist mit $\bar{\delta}_n = O(\delta_m)$:

$$\Phi_{ar}(x, X, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \delta_i(\varepsilon) [\varphi_i(x) + \psi_i(X)].$$

δ_i sind Eichfunktionen.

Theorem 3.2.1.

Unter folgender Voraussetzung an das Verhalten der äusseren AE für $x \rightarrow 0$ Die Funktionen $\varphi_i(x)$ sind so gewählt, dass für $x \rightarrow 0$

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \Delta_{ij}(x) + o(\Delta_{im_i}(x)),$$

wobei a_{ij} eine Folge von Konstanten und Δ_{ij} eine Folge von Eichfunktionen ist mit

$$\Delta_{ij}(x) = x^p (\ln(\frac{1}{x}))^q,$$

d.h. es handelt sich um Elementarfunktionen. Wir nehmen desweiteren an, das Verhalten der Funktionen $\psi_i(x)$ für $X \rightarrow \infty$ sei genauso. Dann ist die reguläre SCEM äquivalent zur MVDP.

Proof. Sei

$$\Phi_0(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \delta_i(\varepsilon) \varphi_i(x, \varepsilon)$$

und

$$\Phi_1(X, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \delta_i(\varepsilon) \psi_i(X, \varepsilon).$$

Dann ist

$$\Phi_{ar} = \Phi_0 + \Phi_1$$

und nach Definition zur Ordnung δ_m :

$$\Phi_0 = E_0 \Phi_0$$

$$\Phi_1 = E_1 \Phi_1$$

Dann gilt:

$$E_0 \Phi_{ar} = \Phi_0 + E_0 \Phi_1 \quad (3.2.1)$$

$$E_1 \Phi_{ar} = E_1 \Phi_0 + \Phi_1 \quad (3.2.2)$$

Wir bekommen

$$\Phi_{ar} = E_0 \Phi_{ar} + E_1 \Phi_{ar} - (E_0 \Phi_1 + E_1 \Phi_0).$$

Wende E_1 auf (3.2.1) und E_0 auf (3.2.2) an:

$$E_0 E_1 \Phi_{ar} = E_0 \Phi_1 + E_0 E_1 \Phi_0$$

$$E_1 E_0 \Phi_{ar} = E_1 \Phi_0 + E_1 E_0 \Phi_1$$

Folglich ist

$$E_0 \Phi_1 + E_1 \Phi_0 = E_0 E_1 \Phi_{ar} + E_1 E_0 \Phi_{ar} - (E_0 E_1 \Phi_0 + E_1 E_0 \Phi_1).$$

Eine andere Schreibweise führt zu

$$E_0 \Phi_1 + E_1 \Phi_0 = E_0 E_1 \Phi_{ar} + E_1 E_0 \Phi_0 - E_0 E_1 \Phi_0 = E_0 E_1 \Phi_1 + E_1 E_0 \Phi_0$$

oder

$$E_0 \Phi_1 + E_1 \Phi_0 = E_1 E_0 \Phi_{ar} + E_0 E_1 \Phi_1 - E_1 E_0 \Phi_1 = E_1 E_0 \Phi_0 + E_0 E_1 \Phi_1.$$

Für diese Wahl von Entwicklungsfunktionen kann man zeigen, dass

$$E_0 \Phi_1 = E_0 E_1 \Phi_1 \equiv E_1 E_0 \Phi_1$$

und

$$E_1 \Phi_0 = E_0 E_1 \Phi_0 \equiv E_1 E_0 \Phi_0$$

Dies liefert somit

$$E_0 \Phi_1 + E_1 \Phi_0 = E_0 E_1 \Phi_{ar} = E_1 E_0 \Phi_{ar} \text{ Matching}$$

und für die überall gültige AE:

$$\Phi_{ar} = E_0 \Phi_{ar} + E_1 \Phi_{ar} - E_0 E_1 \Phi_{ar} = E_0 \Phi_{ar} + E_1 \Phi_{ar} - E_1 E_0 \Phi_{ar}.$$



Dies zeigt, dass MVDP in SCEM enthalten ist.

Zusammenfassung: SCEM ist flexibel und effizient. In ihrer einfacheren Form (Ansatz: reguläre allgemeine AE) führt sie zum selben Resultat wie MMAE. Die Konstruktion ist aber anders. Man startet von einer allgemeinen AE, die eine bestimmte Struktur hat. Eine Regel für das Matching wird hier nicht gebraucht. Im Gegenteil, man bekommt es automatisch beim Durchführen der Methode. Mit der MMAE sucht man erst AEs in verschiedenen signifikanten Gebiete, ein Matching der AEs sorgt für Konsistenz und zu letzt wird die allgemeine AE konstruiert. Da man bei der SCEM allgemeinere AEs verwenden kann, kann man hier viel weiter gehen. Man kann mit dieser Methode viel mehr Information in den ersten Term stecken, und so die Genauigkeit erhöhen. Das ist sehr wichtig, da oft die AR divergent sind, aber auch die RB exakt und nicht asymptotisch erfüllt werden können. Dies führt wiederum zu einer bestimmten Wahl von Eichfunktionen. All dies ist zu berücksichtigen, da die Leistung der asymptotischen Methoden darin bestehen, Lösungen zu finden, die nicht nur für sehr kleine ($\varepsilon \ll 1$) gültig sein sollen. Bei SCEM wird man die schwer zu behandelnden Loharithmen los, die nur bei regulären AEs auftreten.

Durch die Trennung der Variablen x und X wird die Komplexität der Mehrskalenmethode reduziert.

Die Nachteile der Methode bestehen im Aufwand und eine tiefere Analysis ist nötig, um die Eigenschaften der Lösung zu bestimmen. Im Vergleich dazu ist die MMAE systematischer. Die Herausforderung an den Anwender ist, zu wissen, ob sich der Aufwand lohnt.

Chapter 4

Strömungen hoher Reynolds Zahl

Bei den Strömungen einer reibungslosen Flüssigkeit treten zwischen den sich berührenden Schichten nur Normalkräfte (Drücke) auf, bei der zähen Flüssigkeit dagegen auch Tangentialkräfte (Schubspannungen). Diese Reibungskräfte bewirken ein Haften der Flüssigkeit an den Wänden, d.h. an den Wänden ist nicht nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit gleich Null, sondern auch deren Tangentialkomponente (**Haftbedingung**). Für die Theorie bedeutet die Hinzunahme der Reibungskräfte eine erhebliche Erschwerung. Aus diesem Grund ist die Theorie der reibungslosen Flüssigkeiten zu wesentlich größerer Vollkommenheit entwickelt worden. Bei der Theorie der reibungsbehafteten Flüssigkeiten stützt man sich stärker auf experimentelle Ergebnisse.

Bei der einfachen Scherströmung (Couette Strömung) stellt sich wegen der Haftbedingung an den beiden Wänden eine lineare Geschwindigkeitsverteilung $u(y) = U \frac{y}{h}$ ein. An beiden Wänden und an jedem wandparallelen Flächenelement wirkt in der Strömungsrichtung eine Reibungskraft pro Flächeneinheit (Schubspannung):

$$\tau = \mu \frac{d}{dy} u = \mu \frac{U}{h} \quad \text{Newtonsche Reibungsgesetz}$$

Bewegt man einen Körper von beliebiger Gestalt mit konstanter Geschwindigkeit auf geradliniger Bahn durch die ruhende Flüssigkeit, so erfährt dieser Körper eine Strömungskraft, die i. A. eine Komponente in der Strömungsrichtung (Widerstand) und senkrecht dazu (Auftrieb) hat.

Da bei den meisten technisch wichtigen Anwendungen des Umströmungsproblems Re sehr groß ist, könnte man erwarten, dass man eine brauchbare Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erhält, wenn man in erster Annäherung die Zähigkeit ganz vernachlässigt. Dies trifft in der Tat für gewisse Körperformen zu: Stromlinienkörper und Tragflügelprofile; und für gewisse Teilaufgaben (Ermittlung der Druckverteilung und des Auftriebs). Eine große Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtungen besteht bei allen Körperformen für das Widerstandsproblem: Die Potentialströmung liefert für die gleichförmige Bewegung eines Körpers durch eine unendlich ausgedehnte, ruhende Flüssigkeit den Widerstand Null (D'ALEMBERTSches Paradoxon). Eine theoretische Berechnung des Widerstandes wird erst möglich, wenn man die Zähigkeit der Flüssigkeit berücksichtigt. Der Einfluß der Reibung bei der Umströmung eines Körpers beschränkt

sich insbesondere bei schlanken Körper auf eine sehr dünne Schicht direkt an der Wand. Durch das Haften an der Wand wird eine dünne Schicht abgebremst. Diese Schicht bezeichnet man nach L. Prandtl als Grenzschicht oder Reibungsschicht. Mit wachsendem Abstand von der Plattenforderkante nimmt die Grenzschichtdicke zu. Die Schicht ist um so dünner, je kleiner die Zähigkeit ist. Auch bei μ klein kann τ in der Grenzschicht groß sein (großer Geschwindigkeitsgradient) und außerhalb der Grenzschicht sehr klein. Auch bei μ klein kann τ in der Grenzschicht groß sein (großer Geschwindigkeitsgradient) und außerhalb der Grenzschicht sehr klein. Dies führt dazu, bei den Strömungen hoher Re für theoretische Betrachtungen das ganze Strömungsfeld in zwei Bereiche aufzuteilen: das Gebiet der dünnen Reibungsschicht, wo die Reibungskräfte zu berücksichtigen sind, und das Gebiet außerhalb der Grenzschicht, wo sie vernachlässigt werden können und in guter Näherung mit der reibungslosen Flüssigkeit gerechnet werden kann.

Theorien:

- Prandtl's Grenzschichttheorie (1904): Verständnis des Strömungsverhaltens in der Aerodynamik
- MMAE (Van Dyke 1964, Lagerstrom 1965): Mathematisches Formalisieren der Grenzschichttheorie
- Grenzschichttheorie zweiter Ordnung (Van Dyke 1962): Erweiterung

4.0.1 Grenzschichttheorien

Prandtl'sche Grenzschichttheorie

Annahmen an die Strömung: laminar, inkompressibel, 2D, stationär, erfüllt die Navier Stokes Gleichung

In der Grenzschicht sind also Trägheits- und Reibungskräfte von gleicher Größenordnung. Das Kräftegleichgewicht ergibt

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} \tau$$

$$\rho U^2 / L = \mu U / \delta^2$$

Aufgelöst nach der Grenzschichtdicke bekommt man

$$\delta \approx \sqrt{\mu L / \rho U} = \sqrt{\nu L / U} = L / \sqrt{Re}.$$

Entdimensionalisierung der Navier Stokes Gleichung:

$$-\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + \rho u \frac{\partial}{\partial x} u + \rho v \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \quad (4.0.1)$$

$$-\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} v - \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} v + \rho u \frac{\partial}{\partial x} v + \rho v \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \quad (4.0.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \quad (4.0.3)$$

Nach Wahl einer Referenzgeschwindigkeit V und Referenzlänge L , gilt $X = x/L, Y = y/L, U = u/V, V = v/V, P = p/\rho V^2, Re = \rho V L/\mu$. Desweiteren sei der Einfachheit zuliebe $X = x, Y = y, U = u, V = v$ und $P = p$. Die dimensionslose Navier Stokes Gleichung lautet:

$$-\frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \quad (4.0.4)$$

$$-\frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \quad (4.0.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \quad (4.0.6)$$

Ziel: Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichung für große Re

1. Außengebiet: reibungslose Potentialströmung

die Geschwindigkeit variiert über Längen, die in jeder Dimension von gleicher Ordnung sind, d.h. hier gibt es keine großen Geschwindigkeitsgradienten, die Wirkung der Zähigkeit wird bedeutungslos.

AE:

$$u = u_e(x, y) + \dots$$

$$v = v_e(x, y) + \dots$$

$$p = p_e(x, y) + \dots$$

Euler Gleichungen:

$$u_e \frac{\partial}{\partial x} u_e + v_e \frac{\partial}{\partial y} u_e + \frac{\partial}{\partial x} p_e = 0 \quad (4.0.7)$$

$$u_e \frac{\partial}{\partial x} v_e + v_e \frac{\partial}{\partial y} v_e + \frac{\partial}{\partial x} p_e = 0 \quad (4.0.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_e + \frac{\partial}{\partial y} v_e = 0 \quad (4.0.9)$$

RB: gleichförmige Strömung im Unendlichen + Haftbedingung: $v_e(x, 0) = 0$

Output: $u_e(x)$

2. Gebiet: Grenzschicht

Hier wird der Geschwindigkeitsgradient normal zur Wand sehr groß, eine kleine Zähigkeit kommt doch wesentlich zur Geltung, insofern als die Reibungsschubspannung $\tau = \mu \frac{\partial}{\partial y} u$ beträchtliche Werte annehmen kann. Die Trägheits- und Reibungskräfte sind von gleicher Ordnung.

Hier braucht man zwei Längenskalen: eine parallel zur Wand, $x = L$, wobei L die charakteristische Länge des umströmten Körpers ist, und eine senkrecht zur Wand, $y = \delta = L/\sqrt{Re}$, mit δ als Grenzschichtdicke. Es gilt $\delta \ll L$.

$$Re = \frac{LV}{\nu}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re} &= \frac{\nu}{LV} \mid * L^2 \\ \frac{L^2}{\nu Re} &= \frac{L}{V} \\ \Rightarrow O\left(\frac{\delta^2}{\nu}\right) &= O\left(\frac{L}{V}\right)\end{aligned}$$

Es sei $\varepsilon^2 = \frac{1}{Re}$.

Die lokale Variable senkrecht zur Wand ist $Y = \frac{y}{\varepsilon}$. AE:

$$u = u(x, Y) + \dots$$

$$v = \varepsilon v(x, Y) + \dots$$

$$p = p(x, Y) + \dots$$

$$-\frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{1}{Re} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \quad (4.0.10)$$

$$-\frac{1}{Re} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v - \frac{1}{Re} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v + \varepsilon u \frac{\partial}{\partial x} v + \varepsilon v \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial y} p = 0 \quad (4.0.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \quad (4.0.12)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ gelten folgende Grenzschiebtgleichungen erster Ordnung:

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \quad (4.0.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} p = 0 \quad (4.0.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \quad (4.0.15)$$

Die Haftbedingung kann bei $Y = 0$ erfüllt werden: $u(x, 0) = 0$ und $v(x, 0) = 0$.

Für den Druck gilt $p(x, y) = p(x)$. Für die Grenzschiebt ist der Druckgradient entlang der Wand als bekannt anzusehen. Er wird aus der Potentialströmung mittels der Bernoullischen Gleichung (Energieerhaltung)

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

zu

$$\frac{\partial}{\partial x} p = \frac{d}{dx} p = -u_e \frac{d}{dx} u_e$$

bestimmt.

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}p = 0 \quad (4.0.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}p = 0 \quad (4.0.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0 \quad (4.0.18)$$

u_e wird unter 1. berechnet und dient als Input für die Prandtl'sche Grenzschichtgleichung:

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u + = u_e \frac{d}{dx}u_e \quad (4.0.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0 \quad (4.0.20)$$

$$RB : \quad y = 0 : u = 0, v = 0 \quad (4.0.21)$$

$$y = \delta(x) : u = u_e(x) \quad (4.0.22)$$

Die erreichte mathematische Vereinfachung ist beträchtlich: die Bewegungsgleichung senkrecht zur Wand existiert nicht mehr. Die Anzahl der Unbekannten ist also um eins verringert. Auch der Druck ist nicht mehr als unbekannte Funktion zu betrachten. Der Druck wird der Grenzschicht von der Außenströmung her aufgeprägt.

Notation: E_0 sei der äußere Entwicklungsoperator und E_1 der innere EO. Wir wenden VVDP zur Ordnung $O(1)$ an:

$$E_1 E_0 u_e = E_0 E_1 u$$

$$E_1 E_0 v_e = E_0 E_1 v$$

$$E_1 E_0 p_e = E_0 E_1 p$$

Zur Ordnung $O(1)$ gilt

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} u(x, Y) = u_e(x, 0)$$

$$v_e(x, 0) = 0$$

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} p(x, 0) = p_e(x, 0)$$

Rechenschritte:

- Berechne $u_e(x)$ aus den Euler-Gleichungen
- Berechne die Entwicklung der Grenzschicht mit $u_e(x)$ als Input
- Korrigiere $u_e(x)$ durch die Lösung der linearisierten Euler-Gleichungen u_{2e}, v_{2e}, p_{2e}

AE zur Ordnung $O(\varepsilon)$:

$$u(x) = u_e(x) + \varepsilon u_{2e}(x) + \dots$$

$$v(x) = v_e(x) + \varepsilon v_{2e}(x) + \dots$$

$$p(x) = \bar{p}_e(x) + \varepsilon p_{2e}(x) + \dots$$

$$\begin{aligned} (u_e + \varepsilon u_{2e}(x)) \frac{\partial}{\partial x} (u_e + \varepsilon u_{2e}(x)) + (v_e + \varepsilon v_{2e}(x)) \frac{\partial}{\partial y} (u_e + \varepsilon u_{2e}(x)) + \frac{\partial}{\partial x} (p_e + \varepsilon p_{2e}(x)) &= 0 \\ (u_e + \varepsilon u_{2e}(x)) \frac{\partial}{\partial x} (v_e + \varepsilon v_{2e}(x)) + (v_e + \varepsilon v_{2e}(x)) \frac{\partial}{\partial y} (v_e + \varepsilon v_{2e}(x)) + \frac{\partial}{\partial x} (p_e + \varepsilon p_{2e}(x)) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (u_e + \varepsilon u_{2e}(x)) + \frac{\partial}{\partial y} (v_e + \varepsilon v_{2e}(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Zur Ordnung ε gilt die linearisierte Euler Gleichung:

$$u_e \frac{\partial}{\partial x} u_{2e}(x) + u_{2e}(x) \frac{\partial}{\partial x} u_e + v_e \frac{\partial}{\partial y} u_{2e}(x) + v_{2e}(x) \frac{\partial}{\partial y} u_e + p_{2e}(x) = 0 \quad (4.0.23)$$

$$u_e \frac{\partial}{\partial x} v_{2e}(x) + u_{2e}(x) \frac{\partial}{\partial x} v_e + v_e \frac{\partial}{\partial y} v_{2e}(x) + v_{2e}(x) \frac{\partial}{\partial y} v_e + p_{2e}(x) = 0 \quad (4.0.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{2e}(x) + \frac{\partial}{\partial y} v_{2e}(x) = 0 \quad (4.0.25)$$

Output: $u_{2e}(x)$

Wir wenden VVDP zur Ordnung $O(\varepsilon)$ an:

$$E_1 E_0 u_e = E_0 E_1 u$$

$$E_1 E_0 v_e = E_0 E_1 v$$

$$E_1 E_0 p_e = E_0 E_1 p$$

Es gilt

$$E_0 v_e = v_e(x, y) + \varepsilon v_{2e}(x, y)$$

$$E_1 v = \varepsilon v(x, Y)$$

$$E_1 E_0 v_e = E_1 (v_e(x, \varepsilon Y) + \varepsilon v_{2e}(x, \varepsilon Y)) \quad (4.0.26)$$

$$= v_e(x, 0) + \varepsilon Y \frac{\partial}{\partial y} v_e(x, 0) + \dots + \varepsilon v_{2e}(x, 0) + \dots \quad (4.0.27)$$

$$= v_e(x, 0) + \varepsilon \{ Y \frac{\partial}{\partial y} v_e(x, 0) + v_{2e}(x, 0) \} \quad (4.0.28)$$

$$E_0 E_1 v = E_0 \varepsilon v(x, \frac{y}{\varepsilon})$$

Das Matching ergibt

$$v_{2e}(x, 0) = \lim_{Y \rightarrow \infty} [v_e - Y (\frac{\partial}{\partial y} v_e)_{y=0}]$$

Die Divergenzfreiheit ergibt:

$$v_{2e}(x, 0) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [-u + u_e(x, 0)] dY = \frac{d}{dx} [u_e \Delta_1],$$

wobei Δ_1 die sogenannte Verdrängungsdicke ist. Sie beschreibt die Auswirkung der Grenzschicht auf die reibungslose Strömung, d.h. diejenige Schichtdicke, um welche die Potentialströmung infolge der Geschwindigkeitsabminderung in der Grenzschicht nach außen abgedrängt wird. Sie ist definiert durch:

$$\Delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dY.$$

Die Verdrängungsdicke ist ein physikalisch sinnvolles Maß für die Grenzschicht, da die bisher betrachtete Grenzschichtdicke nicht eindeutig angegeben werden kann. Die Reibungswirkung nimmt in der Grenzschicht asymptotisch nach außen ab. Die wandparallele Geschwindigkeit u geht asymptotisch in die Geschwindigkeit u_e der Potentialströmung über. Die Grenzschichtdicke ist definiert durch die Stelle, wo $u = 0.99u_e$ ist.

Die Berechnung der Potentialströmung, die durch die Bildung der Grenzschicht beeinflusst wird kann auf verschiedene Arten durchgeführt werden:

- Betrachtung eines um Δ_1 dickeren Körpers (man kann zeigen, dass $\Delta_1 \approx \frac{1}{3}\delta$).
- Einführung einer Ausblasgeschwindigkeit entlang des Körpers

$$v_b = \frac{d}{dx}[u_e \Delta_1]$$

4.0.2 Anwendung: Anströmung einer dünnen ebenen unendlich langen Platte

Für die Integration der Grenzschichtgleichungen des ebenen Problems geht man häufig so vor, dass man zunächst die Kontinuitätsgl. durch Einführung einer Stromfunktion $\psi(x, y)$ erfüllt, mit

$$u = \frac{\partial}{\partial y}\psi, \quad v = -\frac{\partial}{\partial x}\psi.$$

Äußere Entwicklung:

Sei $\psi(x)$ die Stromfunktion, $L = U = 1$. Die Navier-Stokes Gleichungen lassen sich mit Hilfe dieser Funktion in folgender Form bringen:

$$\left(\psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{Re} \nabla^2\right) \nabla^2 \psi = 0 \tag{4.0.29}$$

$$\psi_x(x, 0) = 0 \tag{4.0.30}$$

$$\psi_y(x, 0) = 0 \quad \text{für } 0 < x < \infty \text{ (1 für die endliche Platte)} \tag{4.0.31}$$

$$\tag{4.0.32}$$

Wir suchen nach einer asymptotischen Lösung für $Re \rightarrow \infty$:

$$\psi(x, y, Re) = \delta_1(Re)\psi_1(x, y) + \delta_2(Re)\psi_2(x, y) + \dots$$

Einsetzen in (4.0.29) und Grenzwert für $Re \rightarrow \infty$ ergibt

$$\psi_1(x, y) \sim \lim_{Re \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\delta_1(Re)} \right] y$$

Ein sinnvolles Ergebnis bekommt man nur, wenn der obige Grenzwert endlich ist. OE sei

$$\delta_1(Re) = 1.$$

Für die Potentialströmung gilt

$$\left(\psi_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \psi_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi_1 = 0,$$

die Konvektion dominiert die viskose Diffusion. Integration ergibt:

$$\Delta \psi_1 = -\omega_1(\psi_1),$$

d.h. die Wirbelstärke $-\Delta \psi_1$ ist nur eine Funktion von ψ_1 ($\omega(\psi_1)$) und somit konstant entlang der Stömungslinien. ω_1 wird weit stromauf bestimmt. Da unsere Potentialströmung rotationsfrei ist, gilt:

$$\Delta \psi_1 = 0 \tag{4.0.33}$$

$$\psi_1(x, 0) = 0 \tag{4.0.34}$$

$$\psi_1(x, y) \sim y \tag{4.0.35}$$

Die Lösung ist:

$$\psi_1(x, y) = y$$

und stellt einfach die gleichmäßige parallele Strömung dar.

Innere Entwicklung: Koordinatenstreckung: $Y = \frac{y}{\tilde{\delta}_1(Re)}$, der Streckungsfaktor $\tilde{\delta}_1(Re)$ muß noch bestimmt werden. Dabei muß $u = \psi_y$ innerhalb und außerhalb der Grenzschicht von $O(1)$ sein, so dass

$$\psi = O(y) = O(\tilde{\delta}_1),$$

d.h. ψ muß mit demselben Faktor wie y vergrößert werden.

$$E_1 \psi(x, y, Re) = \tilde{\delta}_1(Re) \Psi_1(x, Y) + \tilde{\delta}_2 \Psi_2(x, Y) + \tilde{\delta}_3(Re) \Psi_3(x, Y) + \dots$$

Dabei ist $\tilde{\delta}_n$ eine Folge mit $O(1)$ in der Grenzschicht. Einsetzen in der Navier Stokes Gleichung, Multiplizieren mit $\tilde{\delta}_1$ und Grenzwertbildung für $Re \rightarrow \infty$ ergibt

$$\left(\Psi_{1Y} \frac{\partial}{\partial x} - \Psi_{1x} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \Psi_{1YY} = \lim_{Re \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{Re \tilde{\delta}_1^2(Re)} \right] \Psi_{1YYYY}. \tag{4.0.36}$$

OE sei wieder $\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{1}{Re \tilde{\delta}_1^2(Re)} = 1$ (principle of least degeneracy). Dann ist

$$\tilde{\delta}_1(Re) = \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad Y = \sqrt{Re} y.$$

Die Grenzschichtdicke ist somit $\tilde{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$.

Gleichung (4.0.36) wird nun zu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \Psi_{1Y} \frac{\partial}{\partial x} + \Psi_{1x} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \Psi_{1YY} = 0$$

und kann als perfektes Differential umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial Y} (\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y} \Psi_{1xY} + \Psi_{1x} \Psi_{1YY}) = 0.$$

Integration ergibt

$$\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y} \Psi_{1xY} + \Psi_{1x} \Psi_{1YY} = f(x)$$

Matching: $O(1)$:

$$E_0 \psi_y = \psi_{1y}(x, y)$$

$$E_1 E_0 \psi_y = \psi_{1y}(x, \frac{Y}{\sqrt{Re}}) = \psi_{1y}(x, 0) + \frac{Y}{\sqrt{Re}} \psi_{1yy}(x, 0) + \dots = \psi_{1y}(x, 0)$$

$$E_1 \psi_y = \Psi_{1Y}(x, Y)$$

$$E_0 E_1 \psi_y = \Psi_{1y}(x, \sqrt{Re} y) = \Psi_{1y}(x, \infty) + \dots = \Psi_{1y}(x, \infty)$$

Aus

$$E_1 E_0 \psi_y = E_0 E_1 \psi_y$$

folgt

$$\psi_{1y}(x, 0) = \Psi_{1Y}(x, \infty).$$

d.h. die tangentielle Geschwindigkeit nimmt am äußeren Rand der Grenzschicht die Geschwindigkeit aus den Eulergleichungen an.

Das Matching wird dazu verwendet, die unbekannte Funktion $f(x)$ zu bestimmen:

$$\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y} \Psi_{1xY} + \Psi_{1x} \Psi_{1YY} = -\psi_{1y}(x, 0) \psi_{1xy}(x, 0) \quad (4.0.37)$$

$$RB : \Psi_1(x, 0) = \Psi_{1Y}(x, 0) = 0 \quad (4.0.38)$$

So haben wir die Prandtl Gleichung erhalten.

Diese Gleichung ist für alle flachen Körper gültig. Die Krümmung der Oberfläche beeinflußt erst die zweite Approximation.

Lösung der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen

$$\Psi_{1YY} - \Psi_{1Y} \Psi_{1xY} + \Psi_{1x} \Psi_{1YY} = 0 \quad (4.0.39)$$

$$\Psi_1(x, 0) = 0 \quad (4.0.40)$$

$$\Psi_{1Y}(x, 0) = 0 \quad \text{für } 0 < x < \infty \text{ (oder 1 für die endliche Platte)} \quad (4.0.41)$$

$$\Psi_{1Y}(x, \infty) = 1. \quad (4.0.42)$$

Für die endliche Platte kommt noch die Symmetriebedingung $\Psi_{1YY}(x, 0) = 0$ für $1 < x$ dazu.

(4.0.39) ist transformationsinvariant gegenüber

$$\Psi \rightarrow c\Psi_1, \quad x \rightarrow c^2x, \quad Y \rightarrow cY,$$

d.h. die drei Variablen sind in der Lösung (falls eindeutig) nicht trennbar, oder es gilt: $\frac{\Psi_1}{Y}$, $\frac{\Psi_1}{\sqrt{x}}$ sind Funktionen von $\frac{x}{Y^2}$ oder $\frac{Y}{\sqrt{x}}$. Wir wählen die standard Falkner-Skan Notation:

$$\Psi_1(x, Y) = \sqrt{2x}f_1(\eta), \quad \eta = \frac{Y}{\sqrt{2x}},$$

wobei $f_1(\eta)$ der dimensionslosen Stromfunktion entspricht. Einsetzen in (4.0.39) ergibt folgende ODE bekannt unter den Namen Prandtl-Blasius Gleichungen:

$$f_1''' + f_1f_1'' = 0 \tag{4.0.43}$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = 0 \tag{4.0.44}$$

$$f_1'(\infty) = 1. \tag{4.0.45}$$

Die analytische Berechnung der Lösung ist ziemlich mühsam. Von Blasius ist die Lösung in der Form einer Potenzreihenentwicklung um $\eta = 0$ und einer AE für große η angegeben worden, wobei diese zwei Entwicklungen in einer passenden Stelle aneinander angeschlossen werden.

Diese Gleichung muß numerisch gelöst werden (im Bereich $0 < \eta < 10$). Die Lösung ist

$$f_1(\eta) = \frac{1}{2}\alpha_1\eta^2 + O(\eta^5) \sim \eta - \beta_1 + \exp,$$

mit $\alpha_1 = 0.4696$, $\beta_1 = 1.21678$ und \exp diejenige Terme, die exponentiell klein für großes η sind. D.h. die Wirbelstärke, die durch die Schubspannung in der Grenzschicht erzeugt wird, nimmt in der Grenzschicht schneller ab als jede Potenz von η .

2. Term von E_0 : Bisher haben wir den ersten Term der äußeren und den ersten Term der inneren AE berechnet:

$$E_0^{(1)}\psi(x, y) = \delta_1(Re)\psi_1(x, y) = y$$

$$E_1^{(1)}\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{Re}}\sqrt{2x}f_1(\eta)$$

Der Ansatz für den 2. Term von E_0 lautet:

$$E_0^{(2)}\psi(x, y) = \delta_1(Re)\psi_1(x, y) + \delta_2(Re)\psi_2(x, y) = y + \delta_2(Re)\psi_2(x, y)$$

Wie $\delta_2(Re)$ auszusehen hat, findet man wieder durch das Matching:

$$E_1^{(1)}E_0^{(2)}\psi(x, y) = \frac{Y}{\sqrt{Re}} + \delta_2(Re)\psi_2(x, \frac{Y}{\sqrt{Re}}) = \frac{Y}{\sqrt{Re}} + \delta_2(Re)[\psi_2(x, 0) + \dots]$$

$$E_0^{(2)} E_1^{(1)} \psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{Re}} \sqrt{2x} f_1\left(\frac{\sqrt{Re}y}{\sqrt{2x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{Re}} \sqrt{2x} \left(\frac{\sqrt{Re}y}{\sqrt{2x}} - \beta_1 + exp\right) = y - \frac{1}{\sqrt{Re}} \beta_1 \sqrt{2x}.$$

Umschreibung in die innere Variable:

$$E_1 E_0^{(2)} E_1^{(1)} \psi(x, y) = \frac{Y}{\sqrt{Re}} - \frac{1}{\sqrt{Re}} \beta_1 \sqrt{2x}.$$

Aus

$$E_1^{(1)} E_0^{(2)} \psi(x, y) = E_1 E_0^{(2)} E_1^{(1)} \psi(x, y)$$

folgt

$$\delta_2(Re) = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

und

$$\psi_2(x, 0) = -\beta_1 \sqrt{2x}. \quad (4.0.46)$$

Einsetzen in die äußere AE ergibt:

$$E_0^{(2)} \psi(x, y) = y - \frac{1}{\sqrt{Re}} \beta_1 \sqrt{2x}.$$

Das genauere Betrachten dieser äußeren AE ermöglicht zwei physikalische Interpretationen der Korrektur der Potentialströmung:

- Die AE wird bei $y = \frac{1}{\sqrt{Re}} \beta_1 \sqrt{2x}$ Null. D.h. die Grenzschicht verschiebt die Potentialströmung um die sogenannte Verdrängungsdicke nach außen.
- Alternative physikalische Interpretation: Die Differentiation von (4.0.46) ergibt

$$-\psi_{2x}(x, 0) = \frac{\beta_1}{\sqrt{2x}},$$

was der Komponente 2. Ordnung der normalen Geschwindigkeit in der äußeren Strömung (ausgewertet an der Oberfläche) entspricht. Dort muß sie gleich der Steigung der Verdrängungsdicke sein. D.h. der Verdrängungseffekt durch die Grenzschicht agiert wie eine Oberflächenverteilung von Quellen.

Einsetzen von $E_0 \psi(x, y)$ in die Gleichung (4.0.29) ergibt folgende lineare Gleichung für $\psi_2(x, y)$:

$$\left(\psi_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \psi_{1x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \Delta \psi_2 + \left(\psi_{2y} \frac{\partial}{\partial x} - \psi_{2x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \Delta \psi_1 = 0$$

Die nichtlinearen Konvektionsterme wurden in zwei Teile aufgespalten: Konvektion der Wirbelstärke 2. Ordnung entlang Stromlinien 1. Ordnung und Konvektion der Wirbelstärke 1. Ordnung entlang Korrekturen der Stromlinien (2. Ordnung). Bisher wissen wir, dass $\Delta \psi_1 = 0$, und dass die Strömung rotationsfrei ist. Die Viskosität hat keinen Einfluß auf die Potentialströmung, d.h.

$$\Delta \psi_2 = -\omega_2(\psi_1) = 0.$$

Zu lösen:

$$\Delta\psi_2 = 0 \quad (4.0.47)$$

$$\psi_2(x, 0) = 0, \quad x < 0 \quad (4.0.48)$$

$$\psi_2(x, 0) = -\beta_1\sqrt{2x}, \quad x > 0 \quad (4.0.49)$$

$$\psi_2(x, y) = o(y) \quad (4.0.50)$$

Lösung:

$$\psi_2(x, y) = -\beta_1\mathcal{R}\sqrt{2(x+iy)}.$$

2. Term für E_1 : Matching für $m = n = 2$ ergibt $\tilde{\delta}_2(Re) = \frac{1}{Re}$ und

$$\Psi_{2Y}(x, \infty) = 0. \quad (4.0.51)$$

Die Entwicklung kristallisiert sich als eine Reihe von $\frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}}$.

Einsetzen der inneren AE in die Navier-Stokes Gleichung (4.0.29) ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial Y}(\Psi_{2Y^2Y} + \Psi_{1x}\Psi_{2Y^2Y} - \Psi_{1Y}\Psi_{2xY} + \Psi_{2x}\Psi_{1Y^2Y} - \Psi_{2Y}\Psi_{1xY}) = 0$$

$$RB : \Psi_2(x, 0) = \Psi_{2Y}(x, 0) = 0$$

Wegen (4.0.51) gilt $\Psi_2(x, Y) = 0$. Die zweite Approximation lautet somit:

$$E_0^{(2)}\psi(x, y) = y - \frac{1}{\sqrt{Re}}\beta_1\sqrt{2x}$$

$$E_1^{(2)}\psi(x, y) = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{Re}}f_1\left(\frac{\sqrt{Re}y}{\sqrt{2x}}\right) + \frac{0}{Re}.$$

Reibungskraft

Aus der 2-Term inneren AE laesst sich der lokale Reibungskoeffizient berechnen:

$$c_f \equiv \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} \sim \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} + \frac{0}{Re_x} + \dots,$$

wobei $Re_x \equiv Ux/\nu$ die lokale Reynoldszahl ist, die auf dem von der Vorderkante gemessenen Abstand basiert. Durch Integration erhält man den Reibungskoeffizienten

$$c_F = \frac{\int_0^x c_f dx}{x} \sim \frac{\int_0^x \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} dx}{x} = \frac{\int_0^x \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} dx}{x} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_x}} + \dots$$

Imai fand den 2. Term in der AE von C_F heraus:

$$c_F = \frac{\int_0^x c_f dx}{x} \sim \frac{1.328}{\sqrt{Re_x}} + \frac{2.326}{Re_x} + \dots$$

Man hat somit 50 Jahre damit verbracht, herauszufinden, dass ein Term der inneren AE 2 Terme der AE des Reibungskoeffizienten bereitstellt.

3. Term der AE:

So langsam wird die Analysis immer schwieriger. Die Vorderkante der Platte, ein nicht analytisches Gebiet, verursacht Störungen, die sich jetzt bemerkbar machen:

$E_0^{(3)}\psi$: Dieser Term stellt die Verdrängungsdicke verursacht durch den zweiten Term der inneren AE dar. Dieser war 0, folglich ist der dritte Term der äußeren AE auch 0.

$$E_1^{(3)}\psi(x, y, Re) = \frac{1}{\sqrt{Re}}\Psi_1(x, Y) + \frac{0}{Re} + \tilde{\delta}_3(Re)\Psi_3(x, Y) + \dots$$

Einsetzen in die Navier-Stokes Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y}(\Psi_{3YYY} + \Psi_{1x}\Psi_{3YY} + \Psi_{1YY}\Psi_{3x} - \Psi_{1Y}\Psi_{3xY} - \Psi_{1xY}\Psi_{3Y}) &= \\ &= (\Psi_{1Y}\Psi_{31xxx} - \Psi_{1x}\Psi_{1xxY} - 2\Psi_{1xxYY}) \lim_{Re \rightarrow \infty} \left[\frac{Re^{-3/2}}{\tilde{\delta}_3(Re)} \right] \end{aligned}$$

Es folgt

$$\tilde{\delta}_3(Re) = \frac{1}{Re^{3/2}}.$$

Rechnet man so weiter, dann bekommt man für die Wirbelstärke $-\Delta\Psi_3$ einen Ausdruck, der nur für große η klein wird. Das ist ein Widerspruch gegen die wirbelfreie Potentialströmung. Dieses Problem erscheint wegen der scharfen Anströmkante einer geraden Platte. Bei einem analytisch definierten Körper, bildet sich die Grenzschicht gleich am Anfang, und die Wirbelstärke verringert sich exponentiell. Am Anströmepunkt der Platte ist die Grenzschichtapproximation ungültig, muss aber erzwungen werden. Dies erreicht man durch die Hinzunahme eines log-Terms:

$$E_1^{(3)}\psi(x, y, Re) = \frac{1}{\sqrt{Re}}\Psi_1(x, Y) + \frac{0}{Re} + \tilde{\delta}_3(Re)\Psi_3(x, Y) + \delta'_3(Re)\log Re\Psi'_3 + \dots$$

Man findet

$$E_1^{(3)}\psi(x, y, Re) = \frac{1}{\sqrt{Re}}\Psi_1(x, Y) + \frac{0}{Re} + \frac{1}{Re^{3/2}}[\log Re x \frac{f_{32}(\eta)}{\sqrt{2x}} + \frac{f_{31}(\eta)}{\sqrt{2x}}] + \dots$$

Eine Schwierigkeit bleibt bestehen, f_{31} ist nicht eindeutig und eine Konstante bleibt unbestimmt.

Für den lokalen Reibungskoeffizienten gilt somit:

$$c_f \equiv \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} \sim \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} + 0.551 \frac{\log Re_x}{Re_x^{3/2}} + C_1 \frac{1}{Re_x^{3/2}} \dots,$$

und

$$c_F = \frac{\int_0^x c_f dx}{x} \sim \frac{1.328}{\sqrt{Re_x}} + \frac{2.326}{Re_x} - 1.102 \frac{\log Re_x}{Re_x^{3/2}} - \frac{0.204 + 2C_1}{Re_x^{3/2}} \dots$$

Chapter 5

Homogenisierungstheorie

In der Mechanik, Physik, Chemie, Ingenieurwissenschaften, u.a. hat man es oft mit Randwertprobleme in Medien mit periodischer Struktur zu tun (Kristalle, Polymere, poröse Medien, zusammengesetzte Materialien, usw.). Ist die Periode der Struktur klein im Vergleich zu der Region, in der das gesamte System betrachtet wird, macht man Gebrauch von asymptotischer Analysis: man entwickelt die Lösung in eine AE in ε , das Verhältnis der Periode der Struktur zu einer Referenzlänge der Struktur. Mit anderen Worten: Durch eine systematische Entwicklungsstrategie will man von einer mikroskopischen Beschreibung zu einer makroskopischen Beschreibung des Systems kommen.

Die Homogenisierung ist eine mathematische Methode, die es uns erlaubt, die Asymptotik von Differentialgleichungen zu untersuchen, indem man die Mikroskala (ε) gegen Null gehen läßt.

5.1 Mathematische Formulierung

Gegeben sind die Differentialoperatoren A^ε , die von dem kleinen Parameter ε , dem sogenannten Skalierungsparameter, abhängen. Diese Operatoren haben als Koeffizienten periodische Funktionen in allen oder nur in einigen Variablen, deren Periode direkt proportional mit ε ist. Da ε sehr klein ist, haben wir hier Differentialoperatoren mit sehr schnell oszillierenden Koeffizienten, die die mikro-inhomogenen Medien beschreiben:

Randwertproblem:

$$A^\varepsilon u_\varepsilon = f, \Omega + RB \quad (5.1.1)$$

Im allgemeinen ist die Behandlung dieser Gleichungen sehr schwierig. Deswegen möchte man bei solchen Problemen ein effektives homogenes Medium konstruieren. Das physikalische Konzept dieses effektiven Mediums wird in der Mathematik durch Begriffe wie homogenisierte Matrix und homogenisierte Differentialgleichung reflektiert. Man arbeitet mit einer Familie von Funktionen u_ε , wobei die Frage zu beantworten gilt, was mit der Lösung von (5.1.1) passiert, wenn $\varepsilon \rightarrow 0$. Diese Frage zu beantworten hat sich die Homogenisierungstheorie zum Ziel gesetzt, d.h. eine AE für u_ε der Form

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$$

zu finden, oder zumindest den ersten Term davon und ein Konvergenztheorem für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu beweisen. Dafür definiert man eine adäquate Konvergenz im Schwachen Sinne (eine Art Mittelung). Meistens kann man zeigen, dass $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert, wobei u_0 die Lösung folgenden Randwertproblems ist:

$$\mathcal{A}u_0 = f, \Omega + RB. \quad (5.1.2)$$

Dabei ist \mathcal{A} meistens ein Operator mit einfachen Koeffizienten, der sogenannte homogenisierte Operator der Operatoren A^ε . Die Koeffizienten von \mathcal{A} heißen effektive Koeffizienten, die die makroskopischen Eigenschaften des unterliegenden Mediums beschreiben.

Der wichtigste Rechenschritt in der Homogenisierung ist die explizite analytische Konstruktion von \mathcal{A} , d.h. dessen Koeffizienten. Diese Konstruktion benötigt die Lösung eines RWP in einer periodischen Zelle. Die Lösung von (5.1.1), das meistens ein schlecht konditioniertes und kompliziertes System ist, wird durch die Lösung des Zellproblems und anschließend durch die Lösung von (5.1.2) ersetzt, die sich durch Standardverfahren lösen lässt.

Methoden zur Herleitung von \mathcal{A} aus A^ε :

- Konstruktion einer asymptotischen Entwicklung mit mehreren Skalen (Mehrskalermethode)
- Energieabschätzungen
- wahrscheinlichkeitstheoretische Argumente
- Zerlegung des Spektrums periodischer Operatoren (Entwicklung in Bloch-Wellen)

Meistens benutzt man die zwei ersten Methoden zusammen: die erste zur Berechnung von \mathcal{A} und der Testfunktionen, die man in der zweiten braucht, und die zweite, um die Konvergenz der Lösungen zu beweisen.

5.2 Mehrskalermethode

Wir betrachten hier zwei räumliche Längenskalen: eine mißt die Variationen innerhalb der periodischen Zelle (schnelle Skala), die andere im gesamten Betrachtungsgebiet (langsame Skala).

Sei $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir betrachten RWP in \mathcal{O} , deren Operatoren A^ε schnell oszillierende Koeffizienten mit Periode ε haben. Sei

$$Y = \prod_{j=0}^n]0, y_j^0[\in \mathbb{R}^n.$$

Definition 5.2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Y -periodisch, wenn die Periode y_j^0 in der Richtung y_j , $j=1, \dots, n$ zugelassen wird.

Wir betrachten Funktionen

$$\begin{aligned} a_{ij}(y) &\in IR, a_{ij} Y\text{-periodisch}, a_{ij} \in L^\infty(IR^n) \\ a_{ij}(y)\xi_i\xi_j &\geq \alpha\xi_i\xi_i, \alpha > 0, \text{ f.ü. in } y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_0(y) &\in IR, a_0 Y\text{-periodisch}, a_0 \in L^\infty(IR^n) \\ a_0(y) &\geq \alpha_0 > 0, \text{ f.ü. in } y. \end{aligned}$$

Zu diesen Funktionen assoziieren wir folgende Operatoren:

$$A^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right),$$

wobei ε ein kleiner Parameter ist.

Sei $\Phi(x, y), x \in \mathcal{O}, y \in IR^n$ Y -periodisch, dann assoziieren wir zu $\Phi(x, y)$ die Funktion $\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$.

Wir betrachten für die Lösung $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x)$ die AE:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots, \quad (5.2.1)$$

wobei die Funktionen $u_j(x, y)$ Y -periodisch sind $\forall x \in \mathcal{O}$.

Die Mehrskalenmethode besteht darin, dass die AE (5.2.1) in die Gleichung (5.1.1) eingesetzt wird, und nach Potenzen von ε geordnet wird. Dabei betrachtet man zu erst die zwei Variablen als unabhängige Variablen und identifiziert erst hinterher y mit $\frac{x}{\varepsilon}$.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Somit gilt:

$$A^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} A_1 + \frac{1}{\varepsilon} A_2 + A_0,$$

wobei

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ A_2 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0 \end{aligned}$$

Zu lösen sind dann folgende Gleichungen:

$$A_1 u_0 = 0 \quad (5.2.2)$$

$$A_1 u_1 + A_2 u_0 = 0 \quad (5.2.3)$$

$$A_1 u_2 + A_2 u_1 + A_3 u_0 = f \quad (5.2.4)$$

$$\dots \quad (5.2.5)$$

5.2.1 Konstruktion des homogenisierten Operators:

Bemerkung 5.2.2. Das System

$$A_1 \Phi = F \quad Y \quad (5.2.6)$$

$$\Phi \text{ periodisch in } Y \quad (5.2.7)$$

hat eine eindeutige Lösung, wenn

$$\int_Y F(y) dy = 0.$$

Beweis: Sei

$$W(Y) = \{\Phi \mid \Phi \in H^1(Y), \Phi \text{ periodisch}\},$$

d.h. Φ nimmt die gleichen Werte auf gegenüberliegenden Seiten von Y an. Für $\Phi, \psi \in W(Y)$ gilt

$$a_1(\Phi, \psi) = \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \Phi \frac{\partial}{\partial y_i} \psi dy,$$

und sei

$$(F, \psi)_Y = \int_Y f(y) \psi(y) dy.$$

Dann ist (5.2.6) äquivalent zu

$$a_1(\Phi, \psi) = (F, \psi)_Y, \quad \Phi, \forall \psi \in W(Y).$$

Für periodische Φ gilt

$$\int_Y A_1 \Phi dy = 0.$$

□

Wir betrachten

$$W^*(Y) = W(Y)/IR,$$

dann beschreibt die Abbildung

$$\psi \rightarrow (F, \psi)_Y = (F, \psi + c)_Y, \quad \forall c \in IR$$

eine stetige lineare Form auf $W^*(Y)$, wenn $F \in L^2(Y)$. Da

$$a_1(\Phi, \Phi) \geq c \|\Phi\|_{W^*(Y)}^2, \quad c > 0$$

folgt die eindeutige Lösbarkeit (bis auf eine Konstante) in $W^*(Y)$.

Zur Lösung des System (??):

Die einzige periodische Lösung von $A_1 u_0 = 0$ ist $u_0 = const$ (x ist hier ein Parameter), d.h. $u_0(x, y) = u(x)$.

Der erste Term der AE hängt also nicht von y ab.

Die Gleichung (5.2.3) wird zu:

$$A_1 u_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x).$$

Dank dieser Variablentrennung auf der rechten Seite können wir u_1 in eine einfachere Form repräsentieren:

Sei $\chi^j = \chi^j(y)$ die eindeutige Lösung (bis auf eine Konstante) von

$$A_1 \chi^j = A_1 y_j = -\frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y), \quad \chi^j \text{ y-periodisch.} \quad (5.2.8)$$

Die Existenz von χ^j ist gesichert, wenn $\int_Y (A_1 y_j) dy = 0$ ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung ist somit

$$u_1(x, y) = -\chi^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + \tilde{u}_1(x).$$

Zur Lösung der Gleichung (5.2.4):

u_2 existiert, wenn

$$\int_Y (A_2 u_1 + A_3 u_0) dy = \int_Y f dy = |Y|f. \quad (5.2.9)$$

Es gilt

$$\int_Y A_2 u_1 dy = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y a_{ik}(y) \frac{\partial}{\partial y_k} u_1 dy \quad (5.2.10)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y a_{ik}(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \chi^i(y) dy \frac{\partial}{\partial x_j} u. \quad (5.2.11)$$

(5.2.9) \iff

$$-\frac{1}{|Y|} \left(\int_Y (a_{ij} - a_{ik} \frac{\partial}{\partial y_k} \chi^j) dy \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \frac{1}{|Y|} \left(\int_Y (a_0(y) dy) \right) u = f. \quad (5.2.12)$$

Fazit:

Der homogenisierte Operator berechnet sich folgendermaßen:

- Löse (5.2.8) in der Zelle Y für $j = 1, \dots, n$;
- A ist gegeben durch (5.2.12).

Bibliography

- [1] C.M. Bender, and S.A. Orszag, *Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Springer-Verlag, 1999
- [2] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G.Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for periodic structures*, North-Holland Publishing Company, 1978
- [3] A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, 2000
- [4] J. Cousteix and J. Mauss, *Asymptotic Analysis and Boundary Layers*, Springer 2007
- [5] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998
- [6] M. Feistauer, *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1993
- [7] H. Göring, *Asymptotische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen*, 1977
- [8] M.H. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, 1995
- [9] J. Kevorkian, and J.D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, 1981
- [10] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska, *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, Springer-Verlag, 1996
- [11] H. Schlichting, and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, 8th revised and enlarged edition, Springer-Verlag, 2000
- [12] H. Schlichting and K. Gersten, *Grenzschichttheorie*, Springer, 1997
- [13] W. Schneider, *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*, Vieweg, 1978
- [14] V. V. Sychev, A. I. Ruban, V. V. Sychev and G. L. Korolev, *Asymptotic Theory of Separated Flows*
- [15] M. van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, 1972